

Électrocinétique continu

Exercices

Intensité
Batterie & capacité
Énergie
Loi des mailles
Loi des nœuds

1 Vrai ou faux ?

Étudier chacune des propositions ci-dessous afin de déterminer si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Un petit garçon dit à son père :
 - Papa, tu m'as bien dit que le courant électrique c'est des électrons qui circulent dans les fils ?
 - Oui !
 - Ces électrons, ils doivent aller très très vite ?
 - Beaucoup moins que tu ne le crois : comme ils passent leur temps à se cogner et à rebondir sur les atomes dans le fil, ils n'avancent finalement que très lentement, à moins d' $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ en moyenne.
 - Bon ! Alors si j'appuie sur le bouton de la sonnette à la porte du jardin, la sonnerie située dans la maison à 10 m de là sonnera quelques heures plus tard !
2. Le petit garçon reprend les explications de son père :
 - Papa tu as utilisé une analogie hydraulique pour m'expliquer pourquoi la sonnette fonctionnait quasiment dès qu'on appuyait sur le bouton, tu m'as dit que les fils électriques étaient plein d'électrons de la même manière que les tuyaux d'eau du jardin ou ceux du circuit du chauffage central étaient plein d'eau.
 - Oui ! C'est vrai, dit le père.
 - Mais papa, si je perce un tuyau d'eau, de l'eau coule du tuyau. Que se passe-t-il si je « perce » l'isolant d'un fil électrique, si je gratte le vernis isolant ou le plastique jusqu'à arriver au cuivre ou à l'aluminium ? Si j'ai bien compris tes explications, les électrons qui remplissent le fil vont se mettre à couler hors du fil . .
3. Le courant électrique circule positivement dans le sens opposé de celui des électrons.
4. La convention récepteur appliquée aux bornes d'un dipôle impose que tension et courant soient matérialisés par des flèches orientées dans le même sens.
5. Deux résistances placées en série sont toujours parcourues par le même courant.
6. La loi des nœuds résulte du fait qu'aucune charge électrique ne peut s'accumuler en un nœud d'un circuit.
7. La vitesse moyenne de progression des électrons dans un circuit électrique ordinaire parcouru par du courant continu d'intensité donnée est comparable à celle de la lumière.
8. Zoé s'amuse autour de la voiture près de laquelle son père s'affaire. Elle tripote la batterie de voiture que son père vient de recharger.
 - Zoé ! N'y touche pas ! s'écrie-t-il, tu vas prendre le jus !
 - M'en fiche ! répond-t-elle, c'est du 12 V, alors je ne risque rien !
 - Petite ignorante ! reprend son père, ça n'est pas la différence de potentiel qui compte, mais la quantité totale d'électricité accumulée ; plus de $100 \text{ A} \cdot \text{h}$, tu te rends compte, c'est pas comme une pile de lampe de poche !

Zoé hausse les épaules et lance à son père :

— Je crois que tu n'as rien compris à l'électricité Papa...

9. Les oiseaux qui se posent sur une ligne à haute tension risquent l'électrocution.
10. Deux ampoules 110 V - 75 W en série alimentées en 220 V fournissent autant de lumière qu'une ampoule 220 V - 150 W de même rendement lumineux.
11. Un petit garçon dit à son grand-père : « Je viens de lire qu'Albert Einstein avait inventé la théorie de la relativité restreinte en imaginant ce qui se passerait s'il était assis sur un photon. Eh bien en m'imaginant assis sur un électron en déplacement dans un fil, je vois le flot d'électrons immobile par rapport à moi et il n'y a plus de courant électrique. Je n'y comprend plus rien ! Tu m'avais dit qu'un courant électrique est un déplacement de charges, mais ça dépend du référentiel depuis lequel on observe les choses. Comment expliques-tu qu'il y a bel et bien un courant électrique pour un observateur extérieur au fil électrique, observateur pour lequel les électrons sont en mouvement, alors que pour moi le courant serait nul ? Tu m'as raconté n'importe quoi grand-père ! ».
12. Voici un petit dialogue entre Zoé et son père :
 - Tu m'as expliqué que les électrons qui circulent dans les fils électriques, le courant électrique, c'était très analogue à l'eau qui circule dans les tuyaux qui nous alimentent en eau potable.
 - C'est vrai Zoé, il y a vraiment une grande analogie.
 - Bon ! Si je perce un tuyau qui nous amène l'eau, il va y avoir une fuite. De l'eau va s'écouler du tuyau.
 - Oui ma fille, c'est bien ce qui se passerait et ne t'amuse surtout pas à ça !
 - Ne t'inquiète pas papa, je ne tiens pas à inonder la maison. Mais si on en revient aux fils électriques, si on perce un tuyau électrique, si je prend un fil électrique et que j'enlève l'isolant, que je le gratte avec un couteau, c'est comme si je perçais un tuyau d'eau, des électrons devraient se mettre à sortir du fil tout comme l'eau fuirait du tuyau...

Que pensez-vous de l'hypothèse de Zoé ? Vrai ou faux ? Argumenter.

2 Réponses

1. Faux : Les fils sont déjà plein d'électrons ! Lorsque le doigt appuiera sur le bouton de la sonnette, un champ électrique s'établira dans tout le circuit à la vitesse de la lumière et il mettra en mouvement les électrons en chaque point des fils, ceci dans un laps de temps extrêmement bref, indécidable pour un être humain. Ainsi, *tous* les électrons du fil se mettent en mouvement de manière quasi simultanée. Ceux dont le passage dans la sonnette la font sonner ne sont pas ceux qui sont passés dans le bouton poussoir actionnant la sonnette ; ces derniers arriveront des heures plus tard dans la sonnette, si le petit garçon garde le doigt sur le bouton aussi longtemps ! C'est comme lorsqu'on ouvre le robinet d'un tuyau d'arrosage. Si le tuyau est plein, l'eau sort presque tout de suite à l'extrémité du tuyau, même s'il est très long, l'onde de pression qui le parcourt à environ $1200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ met l'eau en mouvement presque immédiatement à notre échelle puisque le tuyau n'est pas très long. Mais c'est l'eau qui était déjà là, au bout du tuyau, qui sort tout de suite et pas celle qui vient de sortir du robinet et qui n'arrivera au bout du tuyau que bien plus tard.
2. Faux, les électrons ne coulent pas hors du fil comme le ferait l'eau. S'il y a des analogies fortes entre les circuits hydrauliques et les circuits électriques, voilà une différence notable !

Les électrons ne coulent pas hors du fil, car ils sont attirés à l'intérieur par les ions positifs. En effet, les électrons libres de se déplacer dans les fils se sont « évadés » d'atomes de cuivre ou d'aluminium et ces atomes qui ont perdus un électrons se sont ionisés positivement. Ce sont ces atomes ionisés qui attirent et retiennent les électrons à l'intérieur des fils.
3. Vrai : Il s'agit là de la convention unanimement adoptée concernant le sens du courant.
4. Faux : C'est le contraire : tension et courant sont orientés en sens inverses.
5. Vrai : De toute évidence, c'est la définition du montage en série.
6. Vrai : Tous les électrons qui arrivent vers un nœud en repartent systématiquement et instantanément.
7. Faux : La vitesse de progression des électrons est de l'ordre de $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ donc considérablement inférieure à celle de la lumière.
8. Vrai : Le père devrait rafraîchir ses connaissances en électricité avant de dire n'importe quoi à sa fille... C'est bien la différence de potentiel de la batterie et la résistance du corps humain qui déterminent l'intensité du courant éventuel qui circulerait à travers la jeune fille. Ici on aurait une intensité de l'ordre de $I = \frac{U}{R} = \frac{12}{2000} = 6 \text{ mA}$, trop faible pour être dangereuse. La quantité d'électricité accumulée dans la batterie n'a absolument rien à voir avec son éventuelle dangerosité.
9. Faux : L'oiseau ne se pose que sur un seul câble, il n'y a donc aucune différence de potentiel entre ses pattes, donc aucun courant qui circule dans l'oiseau, donc aucun danger. Les câbles d'une telle ligne sont beaucoup trop éloignés les uns des autres pour que les pattes d'un oiseau puisse entrer en contact avec deux câbles. De plus les pattes d'un oiseau sont

très peu distantes l'une de l'autre, on ne peut même pas craindre une « tension de pas », tension qui apparaîtrait entre les pattes de l'oiseau posé sur un même câble et due à la circulation d'une très forte intensité (foudre).

Cependant, les choses sont un peu plus compliquées que cela. Au cours du second semestre, lorsque vous serez familiarisés avec l'alternatif monophasé et le comportement des condensateurs soumis à des tensions alternatives, vous pourrez lire avec profit les trois pages du magazine [Pour la Science n° 455 de septembre 2015](#).

10. Vrai : Chacune des deux ampoules est alimentée sous sa tension nominale de 110 V.

11. Faux : Le grand-père n'a pas raconté n'importe quoi à son petit-fils.

Le petit garçon oublie de prendre en compte une partie des charges. S'il y a des électrons libres, c'est parce que des atomes ont abandonné ces électrons. Ces atomes, qui perdent un électrons négatif, s'ionisent positivement et constituent autant de charges positives dans le fils.

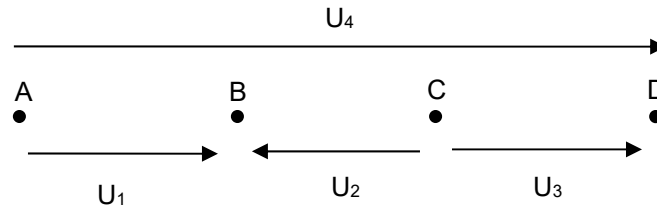
Pour un observateur extérieur au fil, ces atomes ionisés sont immobiles, seuls les électrons sont en mouvement, il y a un courant électrique.

Mais si on s'imagine chevauchant un électrons, en admettant que ces électrons aillent bien sagement tous dans la même directions sans se déplacer en zig-zag et qu'ils aient tous la vitesse moyenne de déplacement, on verrait les atomes ionisés positivement se déplacer ! Leur mouvement s'effectuerait en sens inverse du mouvement des électrons quand ils sont observés de l'extérieur. Cela constitue un mouvement de charge et donc un courant électrique. La vitesse est la même au sens près, la valeur absolue de la charge en mouvement est la même, seul les signes changent. Et comme les deux signes, celui de la vitesse et celui de la charge, changent en même temps, rien ne change ! Les deux courants sont donc égaux. Et oui, un observateur à cheval sur un électron en déplacement percevrait bien un courant identique à celui observé par un observateur extérieur au fil.

12. Faux ! Rien ne sortira du fil électrique, aucun électron ne fuira, ne s'écoulera hors du fil. Les molécules d'eau ne sont pas retenues à l'intérieur d'un tuyau, au contraire, la pression tend à les chasser à l'extérieur. Dans un fil électrique, c'est très différent. S'il y a des électrons libres de se déplacer, c'est parce qu'ils se sont échappé d'un atome du cuivre ou d'aluminium. Cet atome s'est ionisé positivement en perdant un électron. En électrostatique, les charges + (atomes ionisés) et les charges - (électrons libres) s'attirent. Par conséquent les électrons susceptibles de se déplacer dans le fil ne peuvent pas aller bien loin, ils sont retenus dans le fil par des forces électrostatiques. Il n'y a pas de fuite possible.

Si un courant continu circule, un électron va s'éloigner d'un atome, mais cet électron sera remplacé par un autre qui arrive prendre sa place. Vu de loin, on a toujours une charge positive, l'atome ionisé +, compensée par un électron - dans le voisinage, le fil électrique reste neutre et statistiquement la situation demeure immuable pour un atome.

Addition de d.d.p. en série



Exprimer U_4 en fonction de U_1 , U_2 et U_3 .

Réponse :

$$U_4 = V_D - V_A = (V_D - V_C) + (V_C - V_B) + (V_B - V_A) = U_3 - U_2 + U_1$$

Exercices

1. La charge de l'électron étant de $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C, calculer la puissance nécessaire pour lui faire franchir une d.d.p. de 1 V en une seconde.

Combien d'électrons franchissent la section d'un fil de cuivre parcouru par une intensité d'un ampère en une seconde.

Quelle puissance un générateur de force électromotrice de 12 V fournit-il aux électrons qu'il « pompe » sachant que le courant qu'il débite est de 2,5 A ?

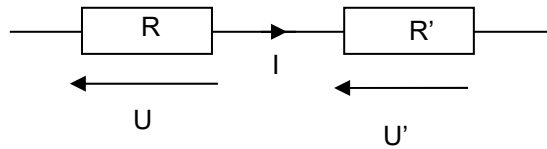
2. Un fer à repasser possède les indications suivantes sur sa plaque signalétique :

$U = 220$ V, $P = 1$ kW.

Quelle intensité absorbe-t-il ? De quelle quantité d'énergie a-t-il besoin pour 1,5 heure de fonctionnement, en kWh, en J ?

3. Le prix de l'énergie électrique est fixé à 0,112 € le kWh par EDF en 2003. Suivant ce tarif, de quelle somme la SNCF serait redevable à EDF pour le fonctionnement d'une rame TGV absorbant une puissance moyenne de 8 MW pendant 3 heures.

4. Soit le schéma :



Un courant I passe dans 2 résistances R et R' placées en série. On connaît $R = 3\ \Omega$ et $U' = 6\text{ V}$.

En 10 s, 240 Joules sont dégagés dans les deux résistances R et R' .

Calculez la puissance dissipée.

Exprimez en fonction de R et de I la puissance dissipée dans R .

Exprimez en fonction de U' et de I la puissance dissipée dans R' .

Écrire et résoudre l'équation dont la solution doit donner I .

Calculer R' et U .

5. La relation courant/tension aux bornes d'une lampe à hydrogène est $u = 2 + 5 \cdot i$. Pour une d.d.p. de 17 V, calculer la puissance consommée.

6. On fait varier l'intensité dans un conducteur en fonction du temps : $i = 2 \times t$.

Calculer la quantité d'électricité qui a circulé au bout de 4 secondes.

Quelle est l'intensité constante qui aurait fait circuler le même nombre d'électrons en 4 s ?

Solutions

1. Pour un électron, franchir une d.d.p. de 1 V nécessite une puissance égale à :

$$P = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ W}.$$

$$i = \frac{q}{t} \Rightarrow n \times e^- = i \times t \text{ avec } n \text{ nombre d'électrons franchissant la section du fil par seconde,}$$

d'où

$$n = \frac{i \times t}{e^-} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ électrons par seconde !}$$

La puissance délivrée par le générateur sera égale à celle qu'il faut fournir à un électron pour qu'il franchisse une d.d.p. de 12 V, multipliée par le nombre d'électrons. Soit :

$$P = (1,6 \cdot 10^{-19} \times 12) \times \frac{2,5}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,5 \times 12 = 30 \text{ W}$$

2. Le fer à repasser absorbe un courant électrique dont l'intensité est :

$$i = \frac{p}{u} = \frac{1000}{220} = 4,55 \text{ A}.$$

Il a besoin d'une énergie égale à :

$$W = p \times t = 1000 \times 3600 \times 1,5 = 5,4 \cdot 10^6 \text{ J} = 1 \text{ kW} \times 1,5 \text{ h} = 1,5 \text{ kWh}$$

3. L'énergie totale consommée par le TGV est de $W = 8 \cdot 10^3 \text{ kW} \times 3 \text{ h} = 24 \cdot 10^3 \text{ kWh}$.

La somme due par la SNCF serait donc de $24 \cdot 10^3 \times 0,112 = 2688 \text{ €}$.

La SNCF, grosse consommatrice d'énergie électrique, a droit à des tarifs plus avantageux que ceux consentis aux particuliers.

$$4. P = \frac{W}{t} = \frac{240}{10} = 24 \text{ W}$$

$$P_R = RI^2$$

$$P_{R'} = U'I$$

$$RI^2 + U'I = 24 \Rightarrow 3 \times I^2 + 6 \times I = 24 \Rightarrow I' = -4 \text{ et } I'' = 2$$

La solution négative est à éliminer, nous n'avons fait aucune hypothèse quant au signe de I, nous retenons $I = 2 \text{ A}$.

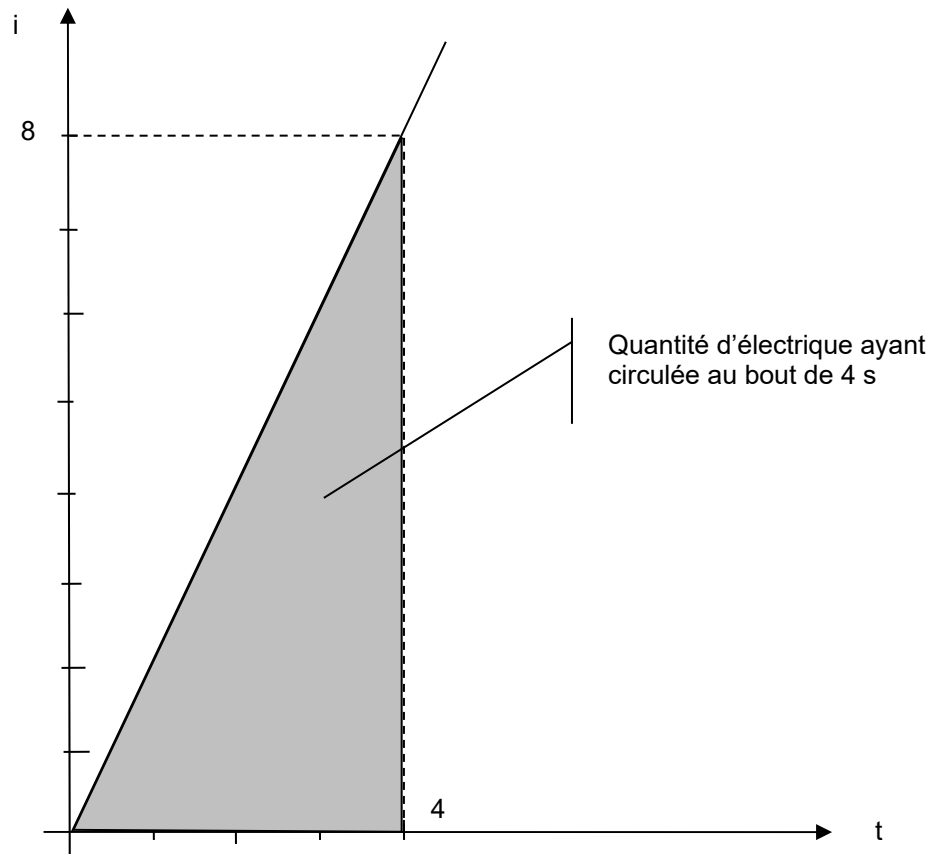
$$\text{Donc : } U' = R'I \Rightarrow R' = \frac{6}{2} = 3 \text{ } \Omega \text{ et } U = RI \Rightarrow U = 3 \times 2 = 6 \text{ V}$$

5.

$$u = 2 + 5 \times i \Rightarrow i = \frac{u-2}{5} = \frac{17-2}{5} = 3 \text{ A}$$

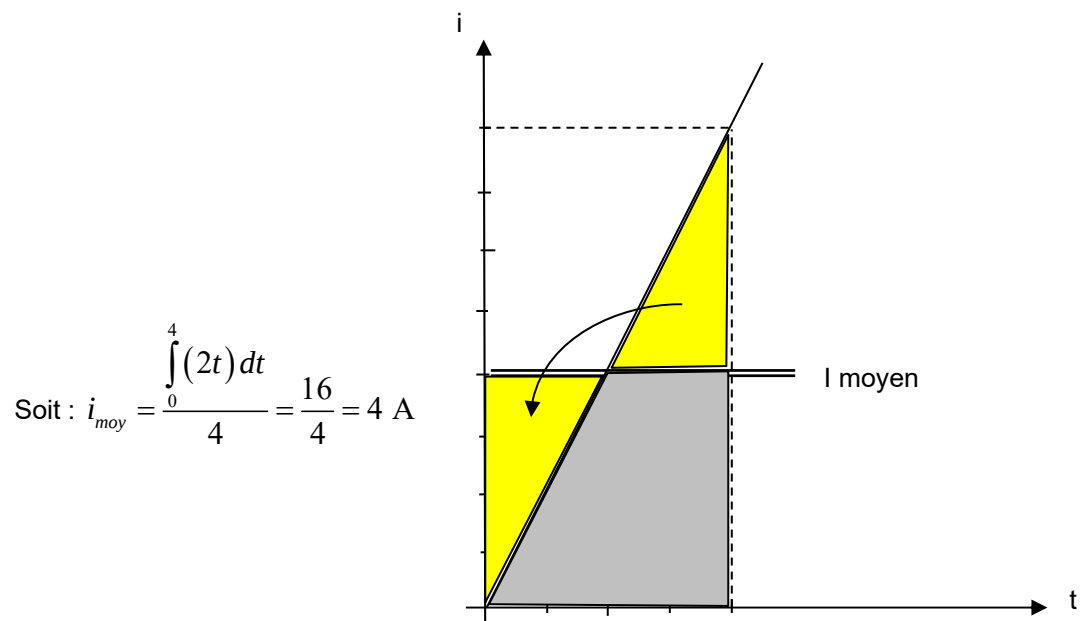
$$p = ui = 17 \times 3 = 51 \text{ W}$$

$$6. i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i dt \Rightarrow q = \int_0^4 (2t) dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^4 = 16 \text{ C}$$



L'intégrale précédente correspond à l'aire grise de la figure ci-dessus. C'est la moitié du rectangle de largeur 4 s et de 8 A de haut, soit $q = \frac{4 \times 8}{2} = 16 \text{ C}$.

L'intensité constante qui aurait fait circuler la même charge correspond à l'intensité moyenne :



Charge d'une batterie

Pour recharger une batterie, un chargeur délivre un courant d'intensité 5,0 A sous une tension de 12 V et fonctionne pendant 10 heures.

- a) Quelle quantité d'électricité circule dans les fils d'alimentation de la batterie lors de cette charge ?
- b) Les porteurs de charge sont les électrons. Combien d'électrons ont circulé pendant cette charge ?

Solution

a) L'intensité du courant $I = 5,0$ A est constante. La durée de la charge est $t = 10$ h = $3,6 \cdot 10^4$ s. La quantité d'électricité circulant dans les fils d'alimentation vaut donc :

$$Q = It = 5,0 \times 3,6 \cdot 10^4 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ C.}$$

b) La valeur absolue de la charge d'un électron est $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Pour avoir la charge Q , il a donc circulé dans les fils N électrons tels que :

$$Q = Ne, \text{ d'où : } N = \frac{Q}{e} = \frac{1,8 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,1 \cdot 10^{24} \text{ électrons !!!}$$

Une batterie d'accumulateurs de 6 V alimente en parallèle deux ampoules de 12 W et une ampoule de 3 W.

- a. Calculer l'intensité du courant débité par la batterie lorsque les trois ampoules sont en circuit.
- b. La capacité de cette batterie étant de 60 Ah, calculer sa durée de fonctionnement à ce régime.

Le rendement en quantité de cette batterie étant de 85 %, on demande combien de temps il faudra pour la recharger sous un régime de 9 A.

Réponses : 4,5 A ; 13 h 20 mn ; 7 h 50 mn.

On veut, au moyen d'une batterie d'accumulateurs, assurer le service d'éclairage d'une installation comprenant des lampes fonctionnant simultanément :

5 lampes de 100 W-110 V, 10 lampes de 60 W-110 V, 10 lampes de 40 W-110 V.

La batterie doit fonctionner pendant 10 h par jour et l'on ne veut la recharger qu'une fois par jour :

- a. Calculer la capacité de la batterie.

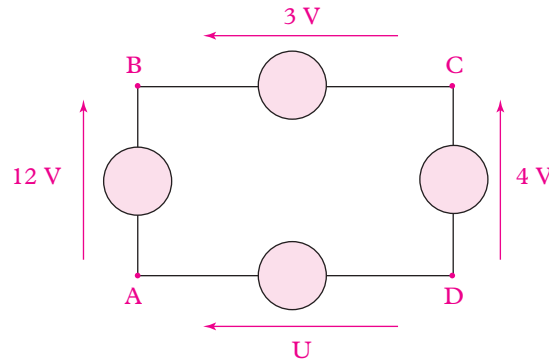
Le catalogue d'un constructeur donne, pour capacité des batteries qu'il fournit les valeurs suivantes : 14, 45, 60, 75, 90, 120, 150, 165 Ah.

- b. Quelle capacité choisira-t-on ?

Réponses : 136 Ah ; 150 Ah ; 55 éléments

Loi des mailles : Calcul d'une différence de potentiel

Déterminer la différence de potentiel U non précisée sur le schéma ci-dessous.



Solution

Dans le circuit, on a : $U_{BA} = 12 \text{ V}$; $U_{BC} = 3 \text{ V}$; $U_{CD} = 4 \text{ V}$; $U_{AD} = U$. La loi des mailles s'écrit :

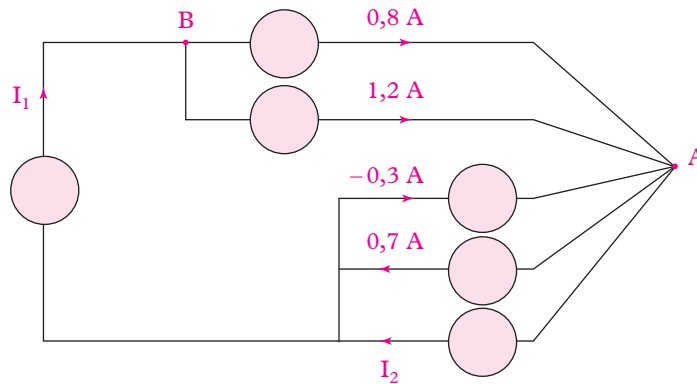
$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0, \text{ avec } U_{AB} = -U_{BA} = -12 \text{ V} \text{ et } U_{DA} = -U_{AD} = -U.$$

On en déduit donc :

$$-12 + 3 + 4 - U = 0, \text{ soit : } U = -5 \text{ V}.$$

Loi des noeuds : Intensité du courant dans un dipôle

Déterminer les intensités I_1 et I_2 non précisées sur le schéma ci-dessous.



Solution

- Les courants d'intensité 0,8 A, 1,2 A et -0,3 A arrivent en A, alors que les courants d'intensité 0,7 A et I_2 repartent de A. D'après la loi des nœuds :

$$0,8 + 1,2 - 0,3 = 0,7 + I_2, \text{ d'où : } I_2 = 1 \text{ A}.$$

- De même, le courant d'intensité I_1 arrive en B et les courants d'intensités 0,8 A et 1,2 A repartent de B. D'après la loi des nœuds :

$$I_1 = 0,8 + 1,2 = 2 \text{ A}.$$

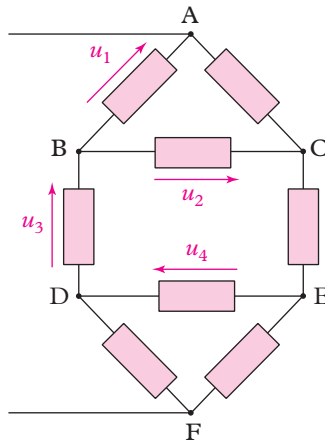
Ex. 1 Référence des potentiels

Lors d'une expérience, on a mesuré les potentiels des points A et F par rapport à la masse. On a, de même, mesuré les différences de potentiel u_1 , u_2 , u_3 , et u_4 .

On obtient les résultats suivants :

$$V_A = 7 \text{ V} \text{ et } V_F = -2 \text{ V} ; \quad u_1 = 4 \text{ V} ; \quad u_2 = 2 \text{ V} ; \quad u_3 = 1 \text{ V} \text{ et } u_4 = 2 \text{ V}.$$

Déterminer les potentiels des points B, C, D et E.
Préciser le point relié à la masse.

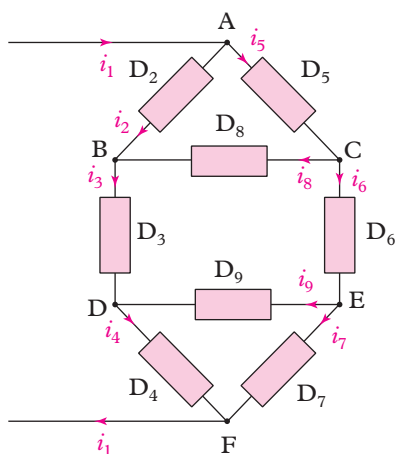


Ex. 2 Loi des nœuds – puissance

a) Dans l'expérience de l'exercice 3, on a mesuré les courants i_1 , i_2 , i_3 et i_4 . On a obtenu :

$$i_1 = 2 \text{ A} ; i_2 = 1 \text{ A} ; i_3 = 0,5 \text{ A} \text{ et } i_4 = 1,5 \text{ A}.$$

Déterminer les intensités des courants i_5 , i_6 , i_7 , i_8 , i_9 .



b) On a mesuré les potentiels des points A, B, C, D, E et F, on a obtenu :

$$V_A = 7 \text{ V} ; V_B = 3 \text{ V} ; V_C = 5 \text{ V} ;$$

$$V_D = 2 \text{ V} ; V_E = 0 \text{ V} \text{ et } V_F = -2 \text{ V}.$$

Déterminer la puissance reçue par chaque dipôle.

Préciser ceux qui sont générateurs et ceux qui sont récepteurs.

c) Déterminer la puissance totale reçue par tous les dipôles. Vérifier la cohérence des résultats.

Exercice 1

D'après la définition des différences de potentiel entre deux points, on a :

$$\bullet u_1 = V_A - V_B, \quad \text{d'où} \quad V_B = V_A - u_1 = 7 - 4 = 3 \text{ V.}$$

$$\bullet u_2 = V_C - V_B, \quad \text{d'où} \quad V_C = V_B + u_2 = 3 + 2 = 5 \text{ V.}$$

$$\bullet u_3 = V_B - V_D, \quad \text{d'où} \quad V_D = V_B - u_3 = 3 - 1 = 2 \text{ V.}$$

$$\bullet u_4 = V_D - V_E, \quad \text{d'où} \quad V_E = V_D - u_4 = 2 - 2 = 0 \text{ V.}$$

Le point E, de potentiel nul, est relié à la masse.

Exercice 2

a) On détermine les intensités cherchées en appliquant la loi des nœuds :

- en A : $i_1 = i_2 + i_5$, d'où $i_5 = i_1 - i_2 = 2 - 1 = 1 \text{ A}$.
- en B : $i_2 + i_8 = i_3$, d'où $i_8 = i_3 - i_2 = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ A}$.
- en C : $i_5 = i_8 + i_6$, d'où $i_6 = i_5 - i_8 = 1 - (-0,5) = 1,5 \text{ A}$.
- en D : $i_3 + i_9 = i_4$, d'où $i_9 = i_4 - i_3 = 1,5 - 0,5 = 1 \text{ A}$.
- en E : $i_6 = i_9 + i_7$, d'où $i_7 = i_6 - i_9 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ A}$.



Les courants sont algébriques : ils peuvent donc être négatifs.



En F, la loi des nœuds s'écrit : $i_4 + i_7 = i_1$, ce qui est bien vérifié (car $1,5 + 0,5 = 2$).

b) On calcule la puissance reçue par un dipôle en étudiant celui-ci en convention récepteur.



De même, on calcule la puissance fournie par un dipôle en se plaçant en convention générateur.

- La puissance reçue par le dipôle D_2 vaut :

$$\mathcal{P}_2 = u_2 i_2 = (V_A - V_B) i_2 = (7 - 3) \times 1 = 4 \text{ W}.$$

- La puissance reçue par le dipôle D_3 vaut :

$$\mathcal{P}_3 = u_3 i_3 = (V_B - V_D) i_3 = (3 - 2) \times 0,5 = 0,5 \text{ W}.$$

- La puissance reçue par le dipôle D_4 vaut :

$$\mathcal{P}_4 = u_4 i_4 = (V_D - V_F) i_4 = 2 - (-2) \times 1,5 = 6 \text{ W}.$$

- La puissance reçue par le dipôle D_5 vaut :

$$\mathcal{P}_5 = u_5 i_5 = (V_A - V_C) i_5 = (7 - 5) \times 1 = 2 \text{ W}.$$

- La puissance reçue par le dipôle D_6 vaut :

$$\mathcal{P}_6 = u_6 i_6 = (V_C - V_E) i_6 = (5 - 0) \times 1,5 = 7,5 \text{ W}.$$

- La puissance reçue par le dipôle D_7 vaut :

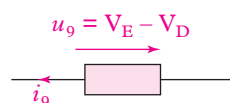
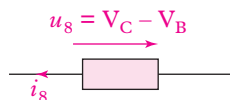
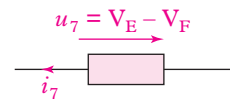
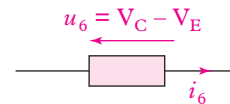
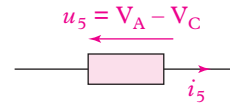
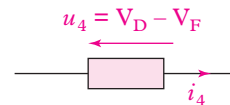
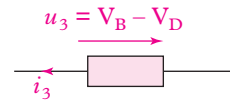
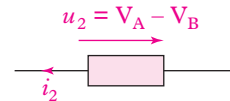
$$\mathcal{P}_7 = u_7 i_7 = (V_E - V_F) i_7 = [0 - (-2)] \times 0,5 = 1 \text{ W}.$$

- La puissance reçue par le dipôle D_8 vaut :

$$\mathcal{P}_8 = u_8 i_8 = (V_C - V_B) i_8 = (5 - 3) \times (-0,5) = -1 \text{ W}.$$

- La puissance reçue par le dipôle D_9 vaut :

$$\mathcal{P}_9 = u_9 i_9 = (V_E - V_D) i_9 = (0 - 2) \times 1 = -2 \text{ W}.$$



Les puissances $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6$ et $\mathcal{P}_7$ sont positives : les dipôles D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 et D_7 sont des **récepteurs**.

Les puissances $\mathcal{P}_8$ et $\mathcal{P}_9$ sont négatives : les dipôles D_8 et D_9 sont des **générateurs**.

c) • La puissance totale reçue par l'ensemble des dipôles est :

$$\mathcal{P}_1 = \sum_{i=2}^9 \mathcal{P}_i = 4 + 0,5 + 6 + 2 + 7,5 + 1 - 1 - 2 = 18 \text{ W}.$$

• La différence de potentiel u_1 , en convention récepteur, appliquée aux bornes du réseau entre A et F est :

$$u_1 = V_A - V_F = 7 - (-2) = 9 \text{ V}.$$

La puissance reçue est : $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1 = 18 \text{ W}$, donc les résultats sont bien **cohérents**.



Cette égalité traduit la conservation de l'énergie dans le réseau électrique.

Déterminer les courants et les tensions inconnus dans le réseau représenté sur la figure 1. Les rectangles figurent des dipôles quelconques (avec ou sans source) dont il n'est pas nécessaire de connaître la nature.

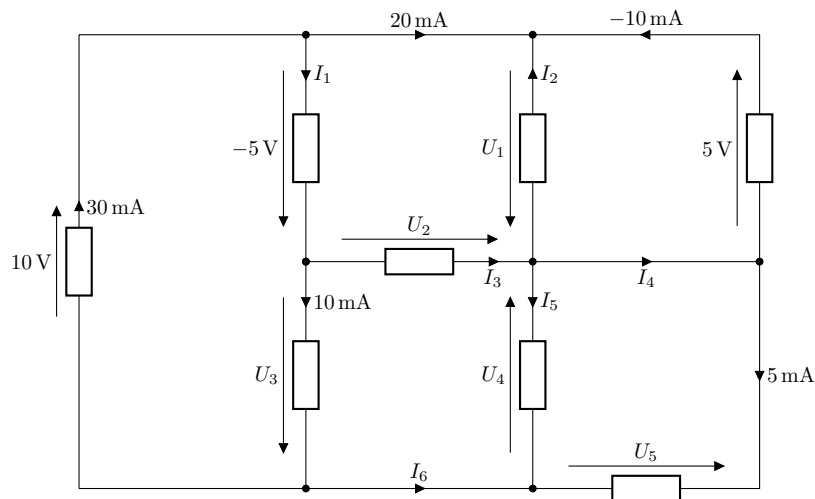


FIGURE 1 – Loi des mailles et loi des nœuds

Réponses : On obtient les courants inconnus en appliquant la loi des nœuds et on trouve les tensions avec la loi des mailles.

- $U_1 = -5 \text{ V}$;
- $U_2 = 0 \text{ V}$;
- $U_3 = -5 \text{ V}$;
- $U_4 = 5 \text{ V}$;
- $U_5 = 5 \text{ V}$;
- $I_1 = 10 \text{ mA}$;
- $I_2 = -10 \text{ mA}$;
- $I_3 = 0 \text{ mA}$;
- $I_4 = -5 \text{ mA}$;
- $I_5 = 15 \text{ mA}$;
- $I_6 = -20 \text{ mA}$.

Soit le circuit de la figure 1 pour lequel on donne :

- $U = V_A - V_B = 240 \text{ V}$;
- $U_2 = V_F - V_B = 184 \text{ V}$;
- $U_3 = U_{AD} = 46 \text{ V}$;
- $U_4 = V_E - V_D = -110 \text{ V}$;

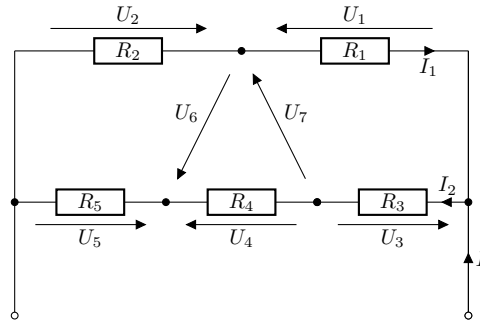


FIGURE 1 – Exercice sur la loi des mailles

1. Placer les points A , B , D , E et F sur la figure.
2. Calculer la valeur des tensions inconnues, en précisant si la flèche pointe vers le potentiel le plus haut ou le plus bas.
3. Calculer les intensités des courants représentés pour $R_1 = R_3 = 100 \Omega$.
Que dire des sens choisis pour les flèches ?

Puisque $U = V_A - V_B$ alors la flèche représentant U pointe vers le point A , ce qui permet de placer A et B . Le point F est repéré à l'aide de $U_2 = V_F - V_B$ dont la flèche pointe vers F . De même le point D est repéré à l'aide de $U_3 = V_A - V_D$ et dont la flèche pointe vers A . Le point E est placé grâce à $U_4 = V_E - V_D$ qui est dirigée de D vers E . On obtient donc le schéma de la figure 2.

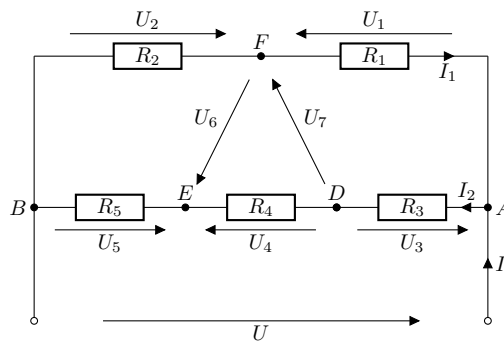


FIGURE 2 – Correction de l'exercice sur la loi des mailles

Nous devons calculer les tensions U_1 , U_5 , U_6 et U_7 . Nous appliquons la loi des mailles en n'utilisant que des grandeurs dont les valeurs sont données par l'énoncé pour ne pas accumuler d'éventuelles erreurs.

- Dans la maille $BAFB$, on établit que $U + U_1 - U_2 = 0$, de sorte que :

$$U_1 = U_2 - U = 184 - 240 = -56 \text{ V}$$

Dans ces conditions $V_F < V_A$.

- En parcourant le chemin $BADEB$, on obtient la relation $U - U_3 + U_4 - U_5 = 0$ et l'on a :

$$U_5 = U - U_3 + U_4 = 240 - 46 - 110 = 84 \text{ V}$$

Ainsi, $V_E > V_B$.

- Le parcours $BFEDAB$ donne $U_2 + U_6 - U_4 + U_3 - U = 0$ et donc :

$$U_6 = U - U_3 + U_4 - U_2 = 240 - 46 - 110 - 184 = -100 \text{ V}$$

On remarque que $V_E < V_F$.

- On établit en parcourant $BFDAB$ que $U_2 - U_7 + U_3 - U = 0$, ce qui permet de calculer :

$$U_7 = U_2 + U_3 - U = 184 + 46 - 240 = -10 \text{ V}$$

Par conséquent : $V_F < V_D$.

Pour déterminer le courant I_1 , on se place aux bornes de la résistance R_1 soumise à la tension U_1 . Celle-ci étant en convention récepteur, on applique directement la loi d'Ohm :

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{-56}{100} = -0,56 \text{ A}$$

La valeur de I_1 est négative, cela implique que la flèche de courant représentée à la figure 1 page précédente a été placée dans le sens opposé du sens réel de circulation du courant : celui-ci circule donc dans le sens opposé à celui indiqué sur le schéma 1 page précédente par I_1 .

Pour déterminer le courant I_2 , on se place aux bornes de la résistance R_3 soumise à la tension U_3 . Celle-ci est aussi en convention récepteur, et on applique là encore la loi d'Ohm sans se soucier du signe :

$$I_2 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{46}{100} = 0,46 \text{ A}$$

La valeur de I_2 étant positive, la flèche de courant représentée sur la figure 1 page précédente a été placée dans le « bon » sens, celui-ci circule donc dans le sens de la flèche qui représente I_2 .

Le courant I se calcule en appliquant la loi des nœuds :

$$I + I_1 = I_2 \Rightarrow I = I_2 - I_1 = 0,46 - (-0,56) = 1,02 \text{ A}$$

La flèche de I étant associée à une valeur numérique positive, elle est orientée dans le sens de circulation du courant qui s'écoule (courant conventionnel) vers le point A .

On considère le circuit de la figure 1. Le générateur fournit une tension $U = 6\text{ V}$. On donne les valeurs numériques, mais pas les flèches, des grandeurs suivantes :

- $U_1 = -0,25\text{ V}$;
- $U_3 = 1,7\text{ V}$;
- $U_4 = 2,3\text{ V}$;
- $I_1 = 1,2\text{ mA}$;
- $I_3 = -4\text{ mA}$;
- $I_4 = 90\text{ mA}$;

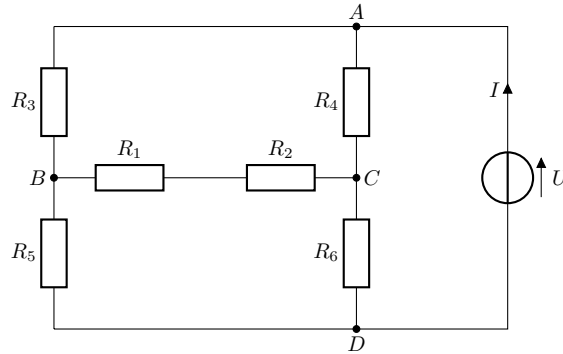


FIGURE 1 – Exercice sur la loi des mailles

1. Indiquer les flèches correspondant aux tensions et aux courants dont les valeurs sont données dans l'énoncé, et déterminer les autres tensions et courants du circuit.
2. Calculer la résistance équivalente du circuit vu du générateur.

Pour faciliter la résolution de l'exercice, on commence par placer la masse, c'est-à-dire le point de *potentiel zéro volt*. Nous la plaçons au point D qui correspond à la borne « $-$ » du générateur de tension. Ainsi, $V_D = 0$ et par conséquent, $V_A = 6\text{ V}$.

Nous rappelons qu'une flèche de tension associée à une valeur positive pointe vers le potentiel le plus haut, qu'une flèche de courant associée à une valeur positive pointe dans le sens conventionnel du courant, et que ce dernier va, dans un récepteur, du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas. Dans notre cas, le sens conventionnel du courant est de A vers D . On établit que :

- Les flèches de tension U_3 et U_4 pointent vers le potentiel le plus haut, c'est-à-dire vers le point A ;
- la flèche de courant I_3 associée à une valeur négative s'oppose au sens conventionnel du courant, et est donc dirigée de B vers A ;
- la flèche de courant I_4 associée à une valeur positive est dans le sens conventionnel du courant, c'est-à-dire dirigée de A vers C .

Nous allons maintenant chercher à orienter I_1 et U_1 . Pour cela, il nous faut comparer les potentiels des points B et C . Or,

$$V_B = V_A - U_3 = 6 - 1,7 = 4,3\text{ V}$$

et

$$V_C = V_A - U_4 = 6 - 2,3 = 3,7 \text{ V}$$

de sorte que $V_B > V_A$. La flèche de courant I_1 étant associée à une valeur positive, elle est orientée de B vers C , et U_1 , qui est associée à une valeur négative, est dans le même sens.

Nous avons reporté en gris sur la figure 2 les grandeurs qu'il reste à déterminer. Les tensions U_5 et U_6 se calculent en évaluant les différences de potentiels. Il vient :

$$U_5 = V_B - V_D = 4,3 \text{ V et } U_6 = V_C - V_D = 3,7 \text{ V}$$

Nous pouvons alors orienter les courants I_5 et I_6 et les calculer à l'aide de la loi des nœuds. Il vient :

$$I_6 = I_1 + I_4 = 91,2 \text{ mA}$$

et

$$I_8 = -I_1 - I_3 = 2,8 \text{ mA}$$

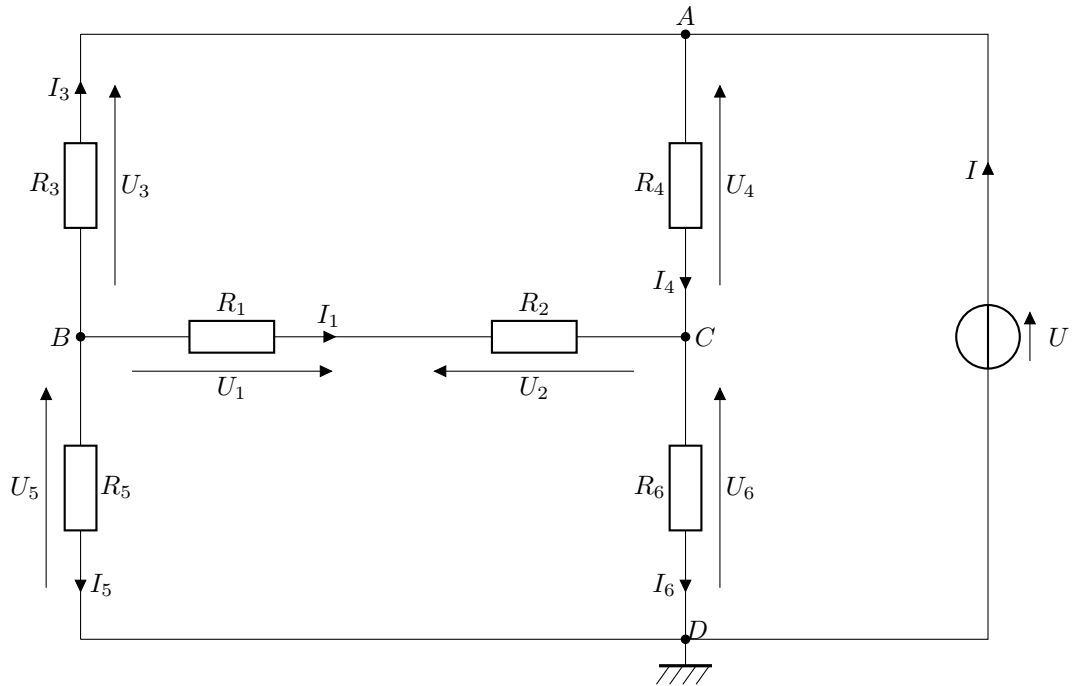


FIGURE 2 – Correction de l'exercice sur la loi des mailles

La tension U_2 se calcule par

$$U_2 = U_{BC} + U_1 = V_B - V_C - U_1 = 4,3 - 3,7 + 0,25 = 0,85 \text{ V}$$

Enfin, le courant 1 se calcule de deux façons différentes, avec

$$I = I_4 - I_3 = I_5 + I_6 = 94 \text{ mA}$$

La résistance équivalente R du circuit vue du générateur est telle que

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6}{0,094} = 63,8 \, \Omega$$

QCM d'entraînement

- Un générateur de tension parfait $U = 10\text{ V}$ alimente une résistance $R = 100\ \Omega$. Le courant I sortant par la borne positive du générateur a pour valeur :
A. -100 mA B. 100 mA C. 10 A D. -10 A
- Lorsque deux résistances sont associées en parallèle, la résistance équivalente à cette association est toujours :
A. supérieure à la valeur la plus élevée des deux résistances ;
B. inférieure à la valeur la plus faible des deux résistances ;
C. inférieure à la valeur la plus élevée des deux résistances ;
D. supérieure à la valeur la plus faible des deux résistances.
- Lorsque deux résistances sont associées en série, la résistance équivalente à cette association est toujours :
A. supérieure à la valeur la plus élevée des deux résistances ;
B. inférieure à la valeur la plus faible des deux résistances ;
C. inférieure à la valeur la plus élevée des deux résistances ;
D. supérieure à la valeur la plus faible des deux résistances.
- Un générateur de tension parfait $U = 10\text{ V}$ alimente une résistance R réglable. On veut que le courant débité par le générateur soit égal à $I = 50\text{ mA}$. À quelle valeur faut-il régler la résistance ?
A. $200\ \Omega$ B. $500\ \Omega$ C. $20\ \Omega$ D. $50\ \Omega$
- Un générateur de tension réel $E = 10\text{ V}$, $r = 1\ \Omega$ est placé aux bornes d'une résistance R variable. Soit U la tension aux bornes du générateur réel, c'est-à-dire de l'ensemble (E, r) . Laquelle de ces propositions est vraie ?
A. Plus la valeur de R est faible plus la valeur de U augmente.
B. Plus la valeur de R est faible plus la valeur de U diminue.
C. Lorsque la valeur de R est voisine de celle de r , on a $U = 0\text{ V}$.
D. Lorsque $R \rightarrow \infty$, on a $U = 0\text{ V}$.
- Un générateur de tension réel $E = 10\text{ V}$, $r = 1\ \Omega$ est placé aux bornes d'une résistance $R = 9\ \Omega$. Soit U la tension aux bornes de R . On a :
A. $U = 1\text{ V}$ B. $U = 9\text{ V}$ C. $U = 8\text{ V}$ D. $U = 10\text{ V}$
- Un générateur de courant parfait alimente une résistance R quelconque. Une des propositions suivantes est fausse :
A. La tension U aux bornes du générateur de courant est nulle.
B. La tension U aux bornes du générateur de courant dépend du courant qu'il débite.
C. La tension U aux bornes du générateur de courant dépend de la valeur de la résistance.
D. Le courant dans la résistance est indépendant de la valeur de R .
- Un générateur de courant parfait, I , alimente deux résistances $R_1 = 10\ \Omega$ et $R_2 = 10\ \Omega$ placées en parallèle :
A. Les deux résistances sont parcourues par le même courant et ce courant vaut I .
B. Les deux résistances sont parcourues par le même courant et ce courant vaut $I/2$.
C. La tension aux bornes du générateur de courant est nulle.
D. La tension aux bornes du générateur de courant est indéterminée.
- Un ensemble de résistances $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ et $R_3 = 20\ \Omega$ est construit comme suit : R_2 et R_3 sont associées en parallèle et R_1 est placé en série avec cette association. Le tout est alimenté par un générateur de tension parfait $E = 10\text{ V}$.
Quelle est la valeur du courant I délivré par le générateur ?
A. 350 mA B. 670 mA C. 860 mA D. 290 mA

Réponses

1. La résistance est traversée par un courant $I = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} = 100 \text{ mA}$. Le courant est bien positif si on respecte la convention générateur : il est compté positivement si on l'oriente par une flèche qui sort de la borne positive du générateur.

2. inférieure à la valeur la plus faible des deux résistances. En effet, on a $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Supposons que R_1 soit la plus faible des résistances. L'expression $\frac{1}{R_{eq}}$ est bien toujours supérieur à $\frac{1}{R_1}$ puisqu'elle est la somme de $\frac{1}{R_1}$ et de $\frac{1}{R_2}$. Donc R_{eq} est bien inférieure à R_1

3. supérieure à la valeur la plus élevée des deux résistances.

$$4. I = \frac{U}{R} \iff R = \frac{U}{I} = \frac{10}{50 \times 10^{-3}} = 200 \Omega$$

5. Plus la valeur de R est faible plus la valeur de U diminue. Plus la résistance est faible, plus l'intensité I du courant dans le circuit est élevée et plus la chute de tension aux bornes de r est importante. Cette chute de potentiel est à retrancher de E et on a $U = E - rI$ qui diminue donc d'autant plus que I est élevé.

6. Le générateur alimente la résistance $R + r$ et le courant qui traverse le circuit a donc pour expression : $I = \frac{E}{r+R} = \frac{10}{1+9} = 1 \text{ A}$. On a donc : $U = RI = 9 \text{ V}$.

7. A. La tension U aux bornes du générateur de courant est nulle. La proposition d est évidemment vraie puisque là se trouve l'intérêt de la source de courant : délivrer un courant constant quel que soit le dipôle qui lui est relié. Les trois autres propositions concernent la tension aux bornes du générateur, calculons son expression. Il s'agit de la même tension que celle qui se trouve aux bornes de la résistance puisque les deux éléments sont connectés l'un à l'autre. On a donc $U = RI$. Cela démontre que la tension U dépend à la fois de la résistance et de la source de courant, ce qui valide les propositions b et c et invalide la proposition A.

8. Les deux résistances sont parcourues par le même courant et ce courant vaut $I/2$. Il est évident que le courant I se sépare en deux courants égaux dans les deux résistances identiques et la loi des nœuds ne peut s'écrire autrement que $I = \frac{I}{2} + \frac{I}{2}$. La proposition A est donc manifestement fausse. Quant à la tension U aux bornes du générateur, elle n'est ni nulle, ni indéterminée. Elle est imposée par la tension qui apparaît aux bornes des résistances : $U = R \times \frac{I}{2}$.

9. 860 mA. La résistance équivalente au montage des 3 résistances a pour expression : $R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = 5 + \frac{10 \times 20}{10 + 20} = 11,67 \text{ C}\Omega$, d'où $I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{10}{11,67} \simeq 860 \text{ mA}$.

Exercice sur des associations de dipôles de tension et de courant

Association en série

On branche en série une source de c.é.m. I_0 et une source de f.é.m. U_0 . L'ensemble est connecté à une résistance R .

Quelle est l'intensité I_R qui traverse la résistance R , et quelle est la tension U_R à ses bornes?

Quelle est la tension U_I aux bornes du dipôle de courant.

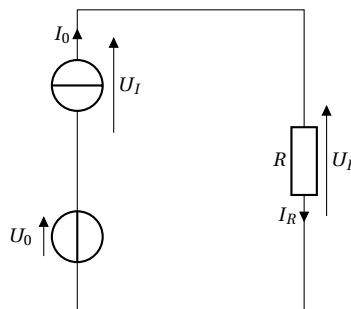


FIGURE 1 – Association en série d'un dipôle de tension et d'un dipôle de courant

On supprime la source de tension du montage de la figure 1 en ne conservant que la source de courant. Le montage devient celui de la figure 2.

Que deviennent l'intensité I_R et la tension U_R ?

Du point de vue de la résistance, la suppression de la source de tension de f.é.m. U_0 change-t-elle quelque chose? Et du point de vue de la source de courant?

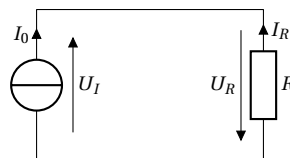


FIGURE 2 – Dipôle de courant associé seul à une résistance R

Voir le corrigé [page 3](#)

Association en parallèle

On branche maintenant en parallèle une source de c.é.m. I_0 et une source de f.é.m. U_0 . L'ensemble est connecté à une résistance R .

Quelle est la tension U_R aux bornes de la résistance et quelle est l'intensité I_R qui la traverse?

Que vaut le courant I_U qui traverse la source de tension?

Pour la résistance, la présence de la source de courant a-t-elle une conséquence?

Voir le corrigé [page 4](#)

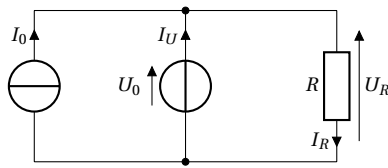


FIGURE 3 – Association en parallèle d'un dipôle de tension et d'un dipôle de courant

identifications d'associations impossibles

Parmi les 8 circuits suivants, certains forment des associations incohérentes qui ne permettent pas de respecter simultanément les lois des composants et la loi des mailles. Déterminez les valeurs des tensions et les intensités des circuits cohérents et expliquez pourquoi les autres circuits ne le sont pas.

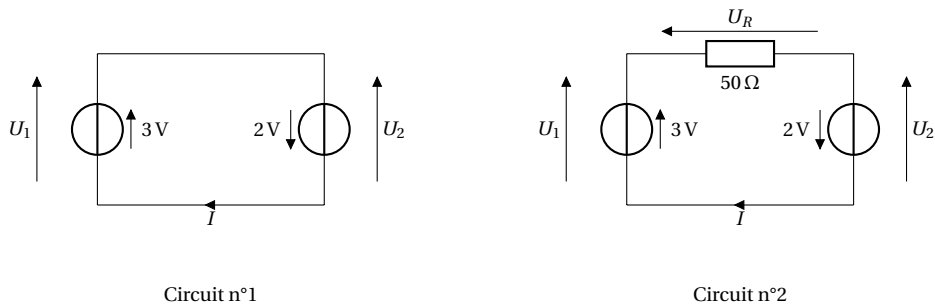


FIGURE 4

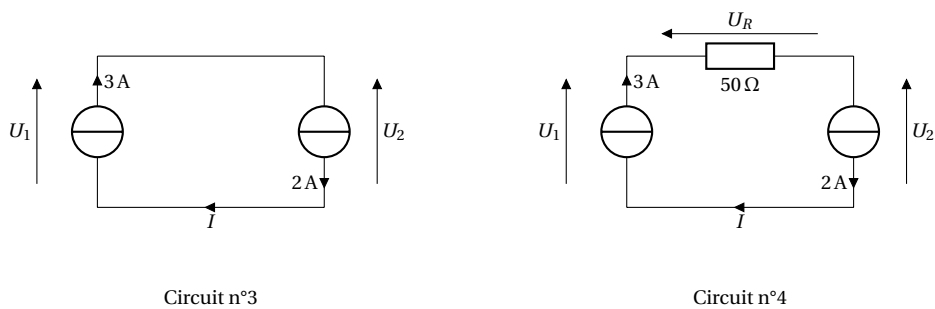
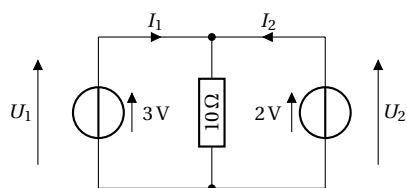
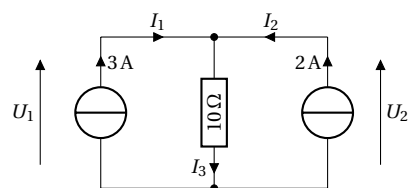


FIGURE 5



Circuit n°5



Circuit n°6

FIGURE 6

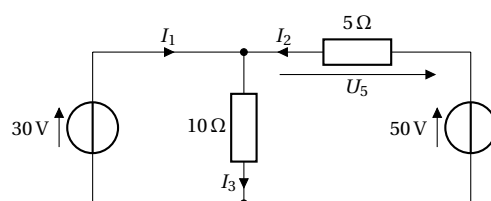


FIGURE 7 – Circuit n°7

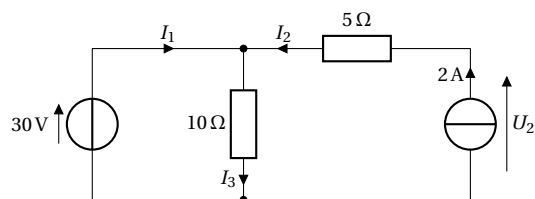


FIGURE 8 – Circuit n°8

Voir le corrigé [page 4](#)

Correction des exercices

Correction de l'exercice association en série [page 1](#)

Nous montrons ainsi un résultat étonnant : les composants placés en série avec une source de courant n'ont aucune influence sur le fonctionnement des dipôles connectés à la branche. Nous avons ainsi l'équivalence montrée à la figure 9 valable pour les dipôles extérieurs connectés à cette association.

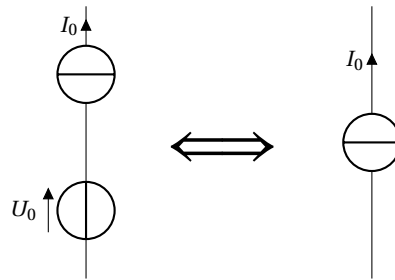


FIGURE 9 – Équivalent de l'association en série d'un dipôle de courant et d'un dipôle de tension

Correction de l'exercice association en parallèle [page 1](#)

Nous montrons une deuxième équivalence surprenante : les composants placés en parallèle avec une source de tension n'ont aucune influence sur le fonctionnement des dipôles connectés à la source. Nous avons l'équivalence montrée à la figure 10 valable pour les dipôles extérieurs connectés à cette association.

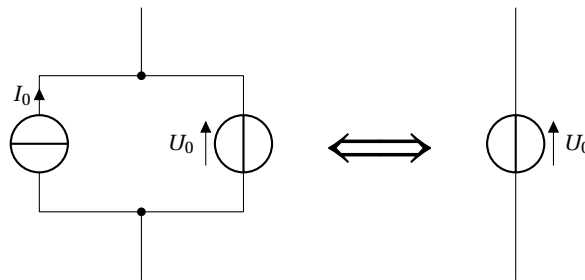


FIGURE 10 – Équivalent de l'association en parallèle d'un dipôle de courant et d'un dipôle de tension

Correction de l'exercice identifications d'associations impossibles

- circuit n°1 : impossible, car conduit à une incohérence au niveau des tensions et également à une intensité infinie.
- circuit n°2 : $U_R = 5\text{ V}$
- circuit n°3 : impossible, car conduit à une tension infinie entre fil du haut et fil du bas.

- circuit n°4 : impossible, car conduit à une tension infinie entre fil du haut et fil du bas.
- circuit n°5 : impossible, car conduit à une incohérence au niveau des tensions imposées aux bornes de la résistance.
- circuit n°6 : $I_1 = 3\text{ A}$, $I_2 = 2\text{ A}$, $I_3 = 5\text{ A}$, $U_1 = U_2 = 50\text{ V}$
- circuit n°7 : $I_1 = -1\text{ A}$, $I_2 = 4\text{ A}$, $I_3 = 3\text{ A}$, $U_5 = 20\text{ V}$
- circuit n°8 : $I_1 = 1\text{ A}$, $I_2 = 2\text{ A}$, $I_3 = 3\text{ A}$, $U_5 = 10\text{ V}$, $U_2 = 40\text{ V}$

QCM d'entraînement

1. Un dipôle est dit linéaire si la tension à ses bornes et le courant qui le traverse sont proportionnels.
A. VRAI B. FAUX
2. Le courant électrique circule positivement dans le sens opposé de celui des électrons.
A. VRAI B. FAUX
3. La convention récepteur appliquée aux bornes d'un dipôle impose que tension et courant soient matérialisés par des flèches orientées dans le même sens.
A. VRAI B. FAUX
4. Un générateur de tension parfait possède une résistance interne infinie.
A. VRAI B. FAUX
5. Un générateur de courant parfait possède une résistance interne infinie.
A. VRAI B. FAUX
6. Dans un circuit alimenté par un générateur de tension, il ne peut y avoir que des tensions et des courants continus.
A. VRAI B. FAUX
7. Deux résistances placées en série sont toujours parcourues par le même courant.
A. VRAI B. FAUX
8. La loi des nœuds résulte du fait qu'aucune charge électrique ne peut s'accumuler en un nœud d'un circuit.
A. VRAI B. FAUX

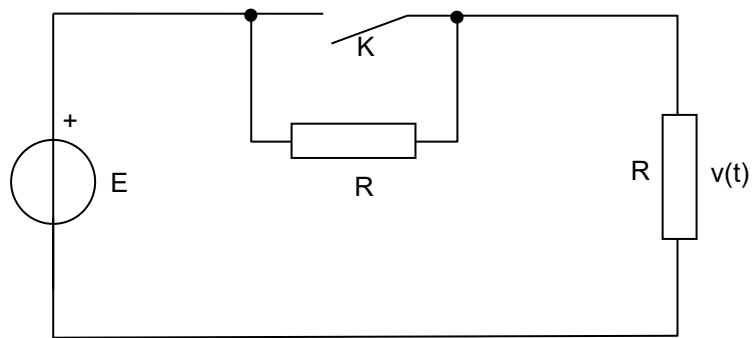
Réponses

1. FAUX. Un dipôle est linéaire si son équation de fonctionnement est une équation différentielle linéaire. Seule la résistance présente une proportionnalité entre courant et tension.
2. VRAI. Il s'agit là de la convention unanimement adoptée concernant le sens du courant.
3. FAUX. C'est le contraire : tension et courant sont orientés en sens inverses.
4. FAUX. C'est le contraire, plus la résistance interne est faible, meilleur est le générateur et il est considéré comme parfait si sa résistance interne est nulle.
5. VRAI. Ne pas oublier que l'imperfection d'un générateur de courant est modélisée par une résistance en parallèle qui doit être en théorie infinie pour ne pas perturber le courant issu du générateur.
6. FAUX. En fait c'est quand même vrai si l'on a affaire à un circuit fonctionnant réellement en régime continu. Mais il y a des exceptions, en particulier les montages oscillateurs qui, à partir de signaux continus, peuvent générer des signaux sinusoïdaux mais dans ce cas, on ne peut plus vraiment parler de régime continu.
7. VRAI. De toute évidence, c'est la définition du montage en série.
8. VRAI. Tous les électrons qui arrivent vers un nœud en repartent systématiquement et instantanément.

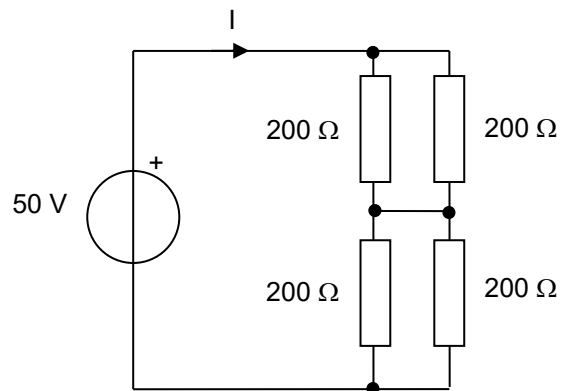
Résistances équivalentes

Exercices

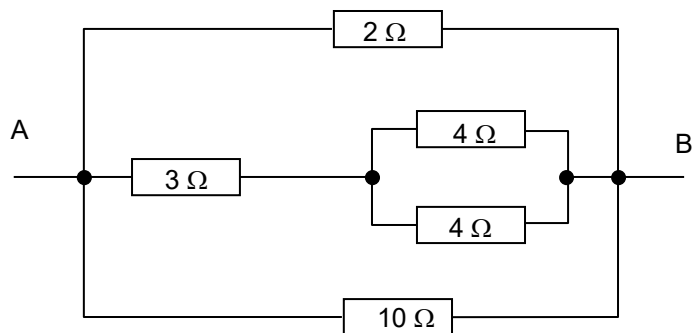
1. On ferme le contact K à l'instant t_0 . Dessiner l'évolution de $v(t)$.



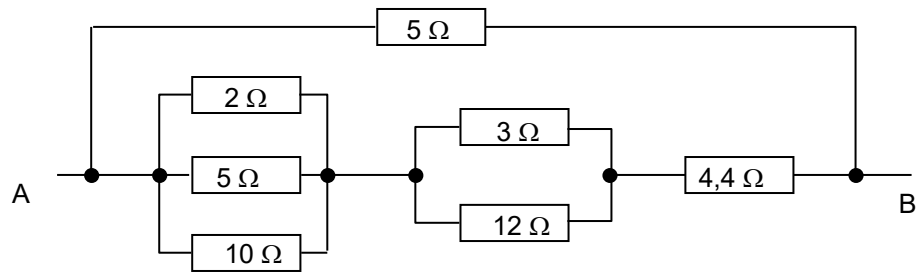
2. Déterminer I dans le schéma ci-dessous.



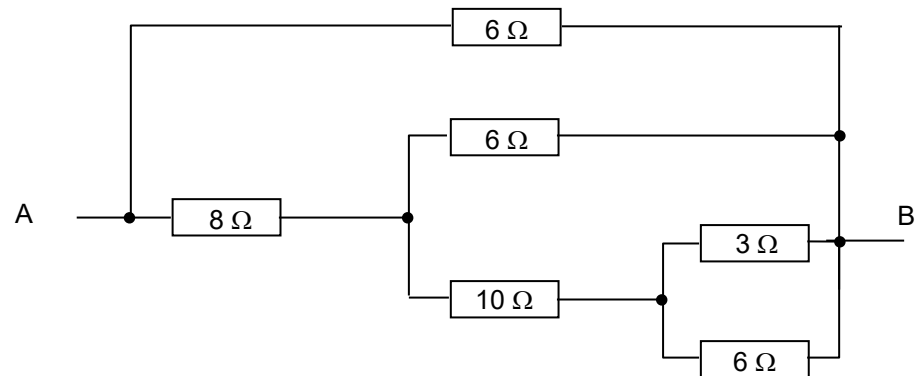
3. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



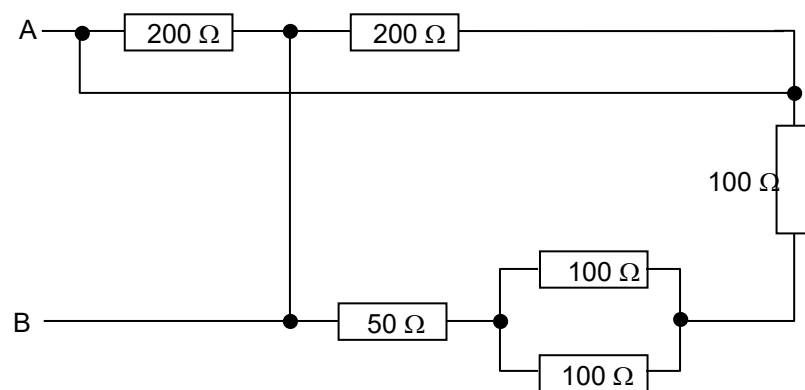
4. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



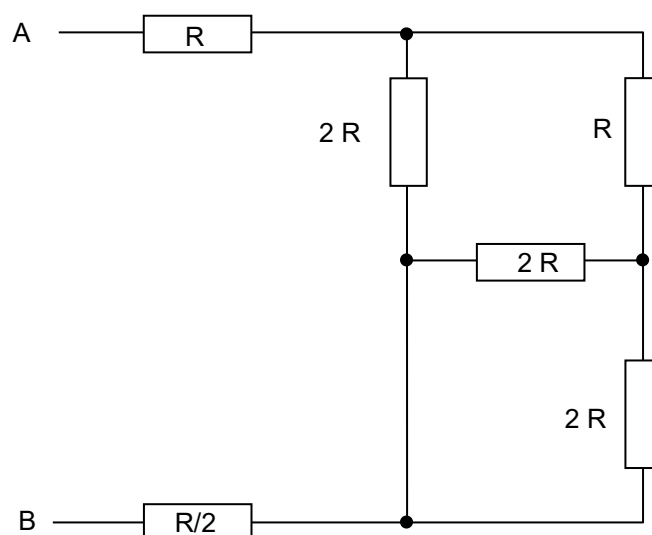
5. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



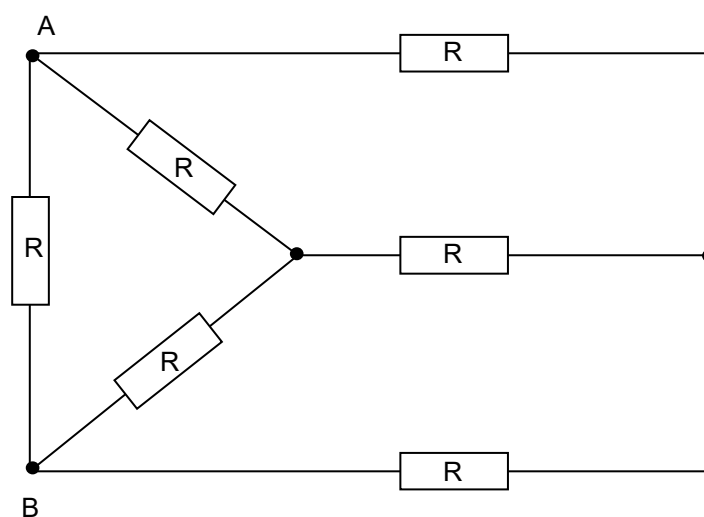
6. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



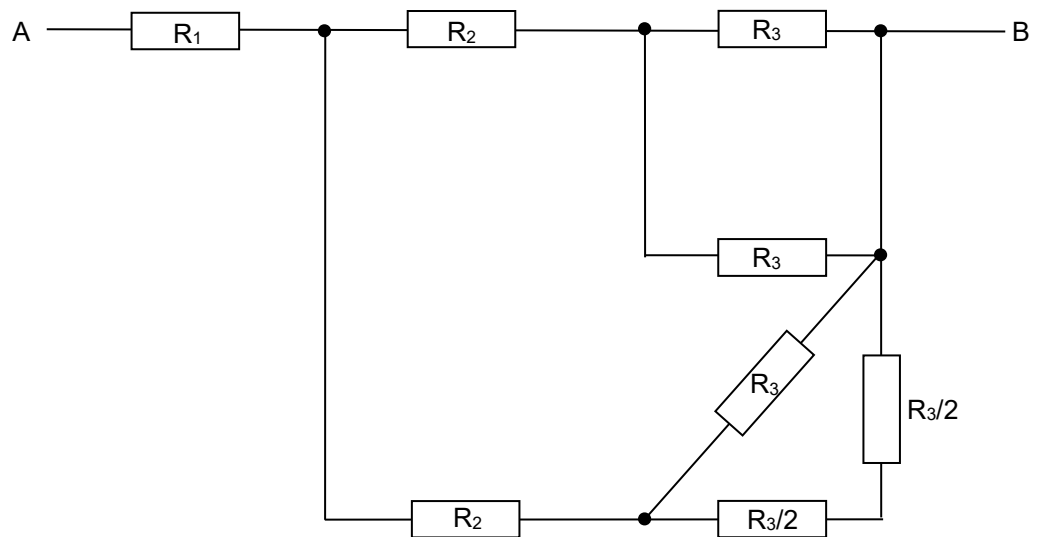
7. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



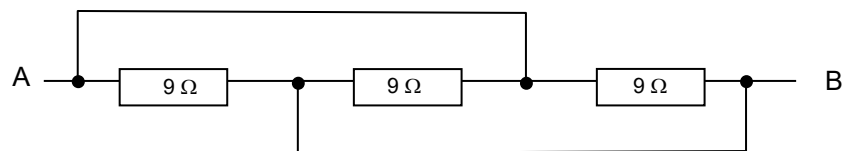
8. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



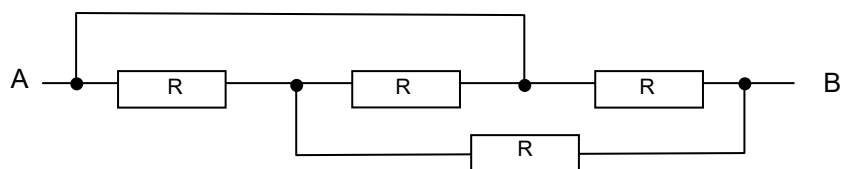
9. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



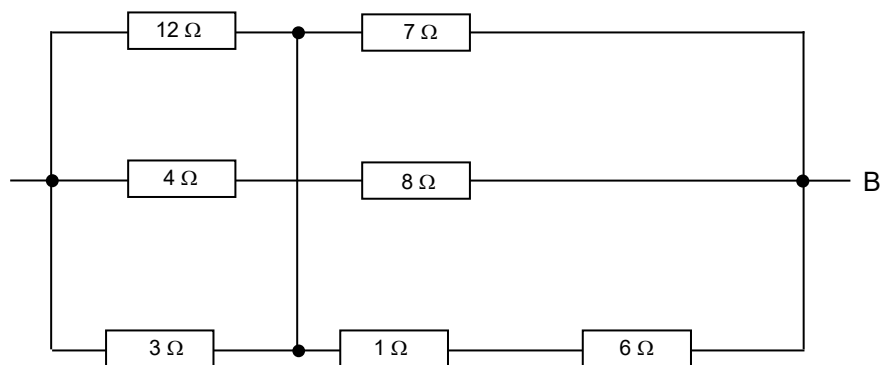
10. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



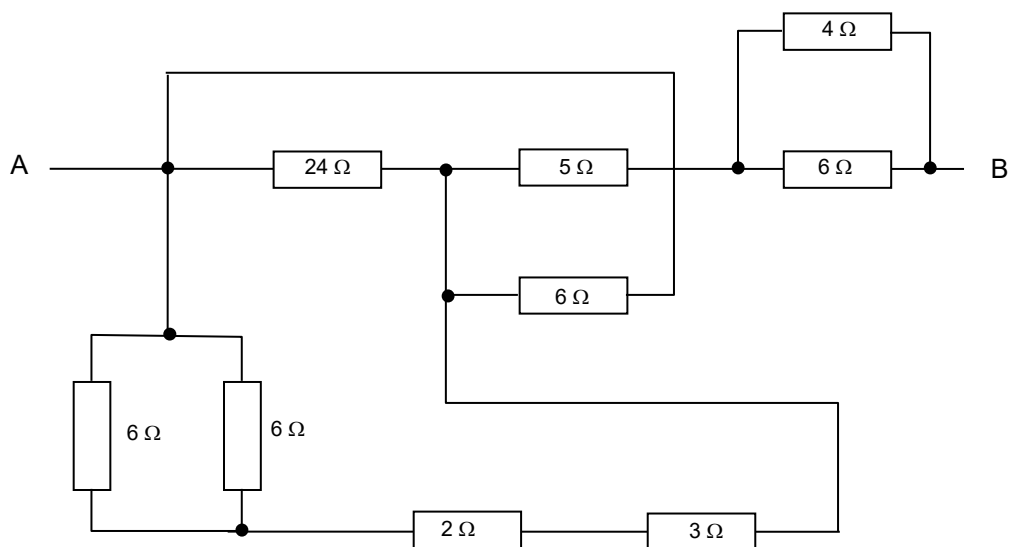
11. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



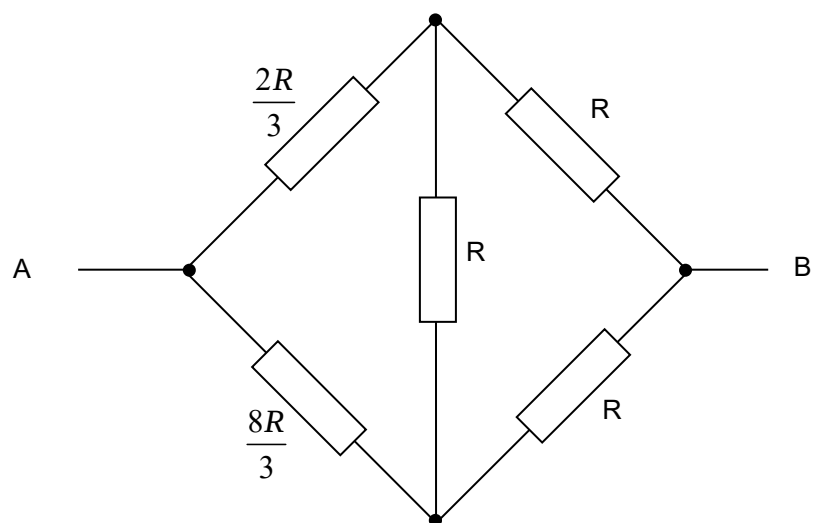
12. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



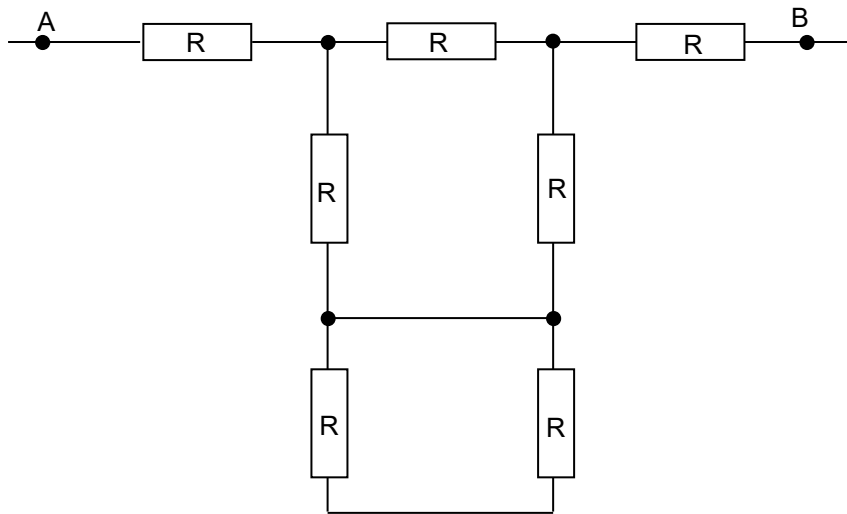
13. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



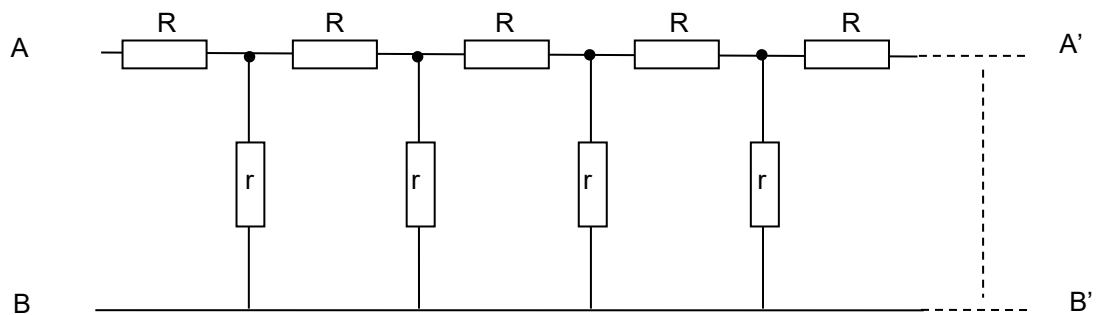
14. Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



15. Déterminer la résistance équivalente vue des points A et B.

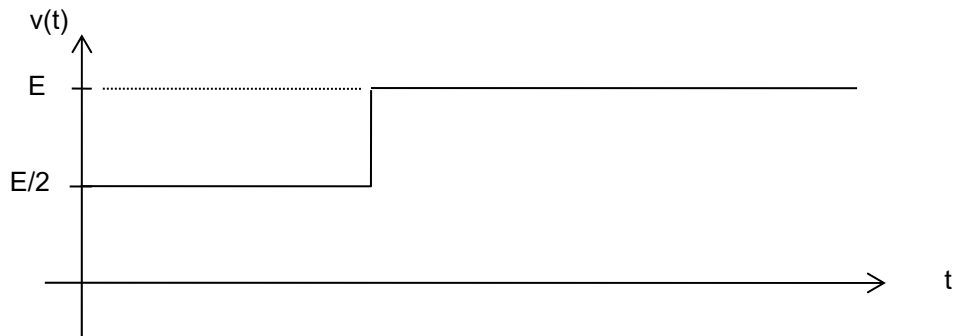


16. Quelle est la résistance du réseau ci-dessous, vu des points A et B, lorsqu'il comporte une infinité de cellule R-r ?

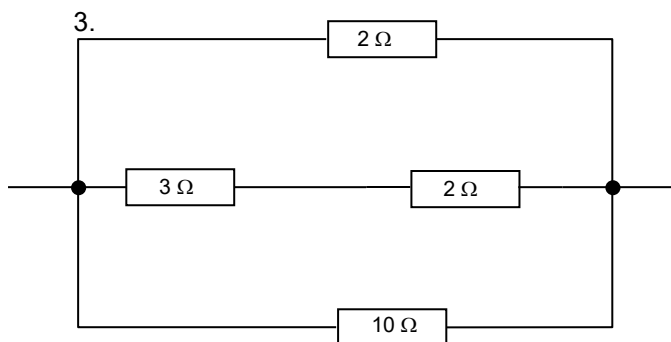


Solutions

1. K étant ouvert, les deux résistances R forment un diviseur de tension par 2. La d.d.p. $v(t)$ est égale à $E/2$. Si on ferme K, il n'y a plus de diviseur de tension, la d.d.p. passe de $E/2$ à E .
D'où la forme de $v(t)$:

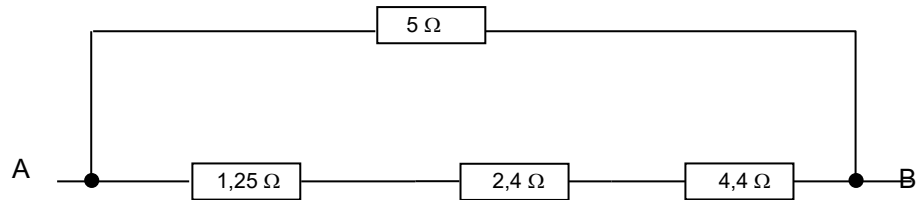


$$2. R_{eq} = \left(\frac{200}{2} \right) + \left(\frac{200}{2} \right) = 200 \, \Omega \Rightarrow I = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0,25 \, A$$



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow R_{eq} = 1,25 \, \Omega$$

4.

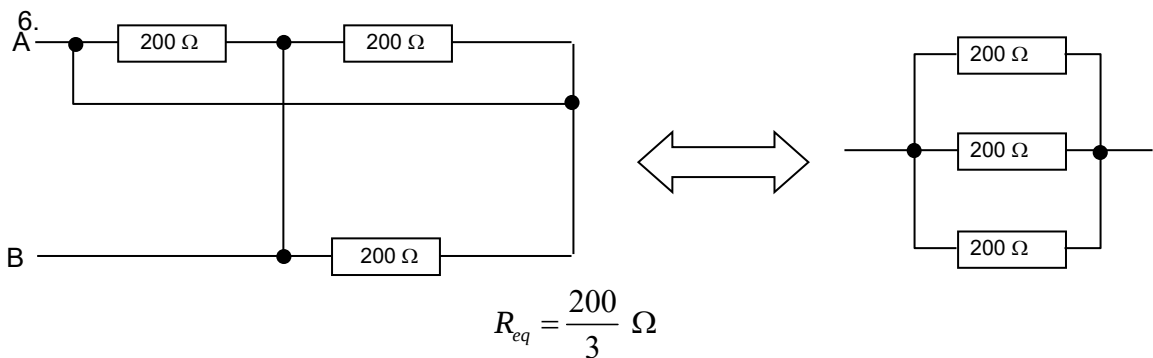


$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow R_{eq1} = 1,25 \Omega$$

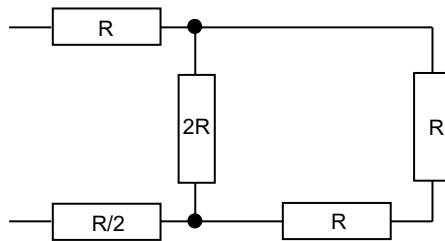
$$R_{eq2} = 1,25 + 2,4 + 4,4 = 8,05 \Omega$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8,05} \Rightarrow R_{eq} = 3,084 \Omega$$

5. En regroupant deux résistances en parallèle, de proche en proche, on obtient : $R_{eq} = 4 \Omega$.



7. Un premier regroupement des deux résistances de valeur $2R$ placées en parallèle donne :



$$\text{Puis : } R_{eq} = R + R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2} \cdot R$$

8. On n'a pas intérêt à appliquer la transformation de Kenelly au triangle qui apparaît de prime abord. On peut appliquer Kenelly à un triangle formé de deux résistances horizontales et d'une résistance du triangle. On trouve : $R_{eq} = R/2$

9. Là aussi, il n'est pas nécessaire d'appliquer Kenelly à ce qui ressemble à un triangle mais n'en n'est pas un ! On trouve : $R_{eq} = R_1 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{4}$

10. Il faut réussir à voir que les trois résistances de 9Ω sont en parallèle, ainsi : $R_{eq} = 3 \Omega$

$$11. R_{eq} = \frac{3}{5} \cdot R$$

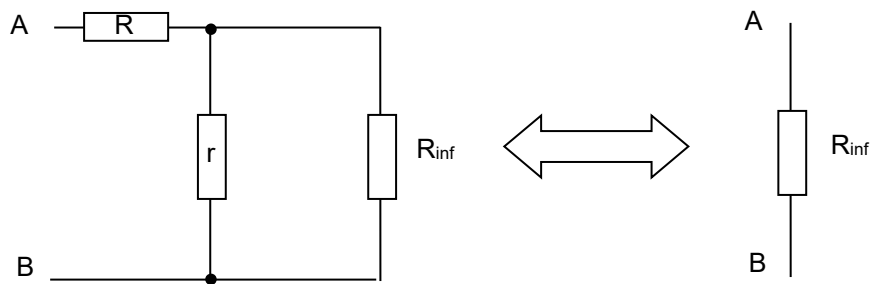
12. $R_{eq} = 3,95 \Omega$

13. $R_{eq} = 10,4 \Omega$

14. $R_{eq} = \frac{13}{12} R$

15. $R_{eq} = 2R + \frac{2}{3} R$

16. La méthode de résolution de ce problème peut être utilisée dans d'autres domaines de la physique (chaîne infinie de lentilles par exemple). Appelons R_{inf} la résistance du réseau infini que nous cherchons, celle-ci ne change pas lorsque l'on ajoute un nouvel élément R - r au début de la chaîne pour l'augmenter d'une unité.



Nous obtenons l'équation suivante :

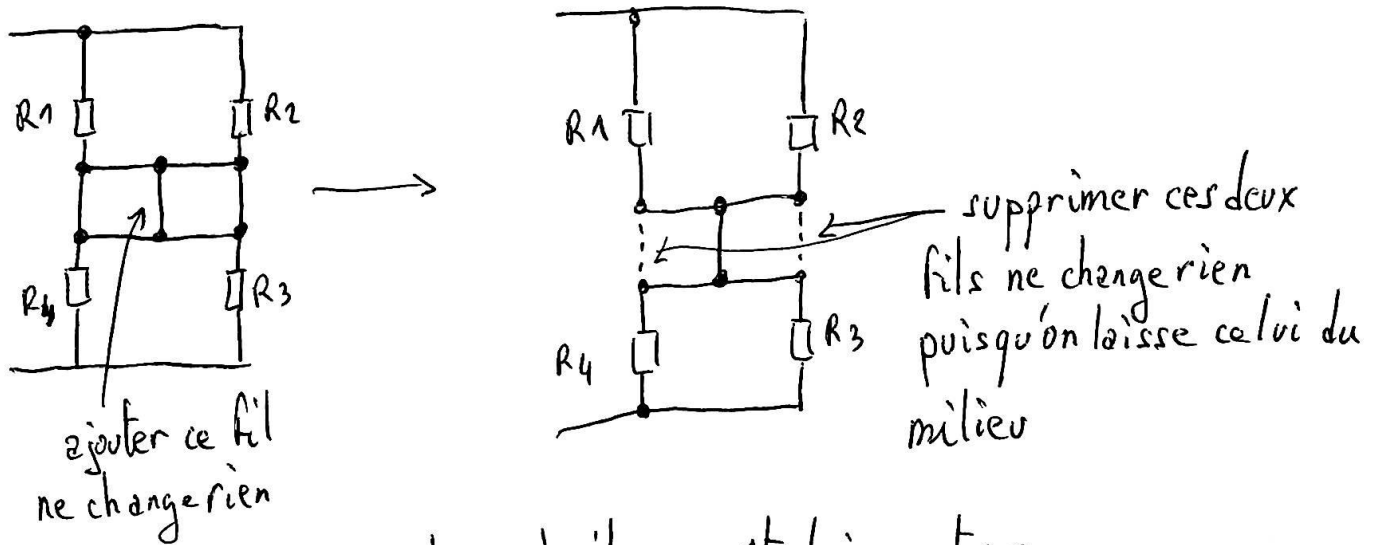
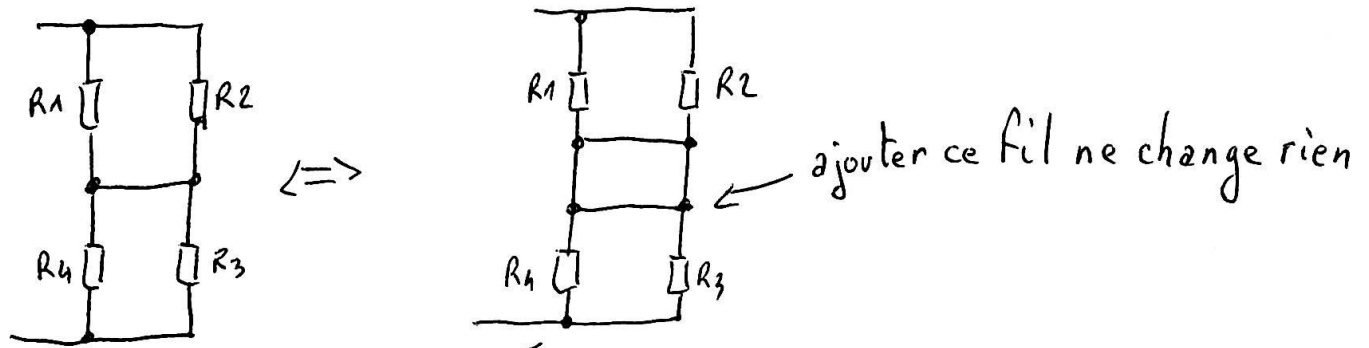
$$R + \frac{rR_{inf}}{r + R_{inf}} = R_{inf} \Rightarrow R_{inf}^2 - R_{inf}R - rR = 0$$

$$\text{Soit : } R'_{inf} = \frac{R - \sqrt{R^2 + 4Rr}}{2} \text{ ou } R''_{inf} = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4Rr}}{2}$$

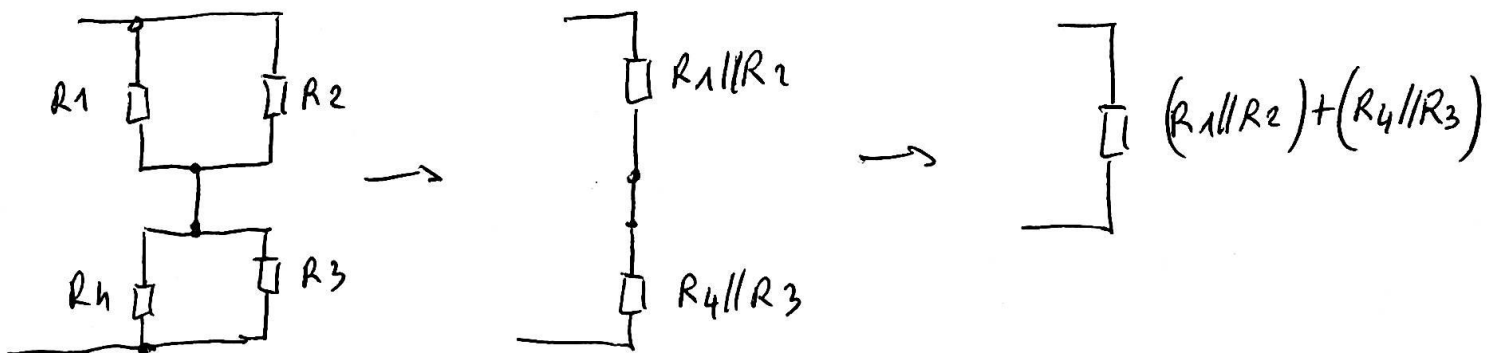
La solution $R'_{inf} = \frac{R - \sqrt{R^2 + 4Rr}}{2}$, généralement négative, est à éliminer. Il n'y a en effet aucune raison de trouver une résistance $R < 0$, cela n'aurait pas de signification.

Dans un réseau en échelle comme celui que l'on vient d'étudier, une façon de le terminer, après quelques sections, sans introduire aucune erreur dans son atténuation, consiste à insérer une résistance de la valeur déterminée ci-dessus au bout des sections R - r .

ELECTRICITÉ EXO 2

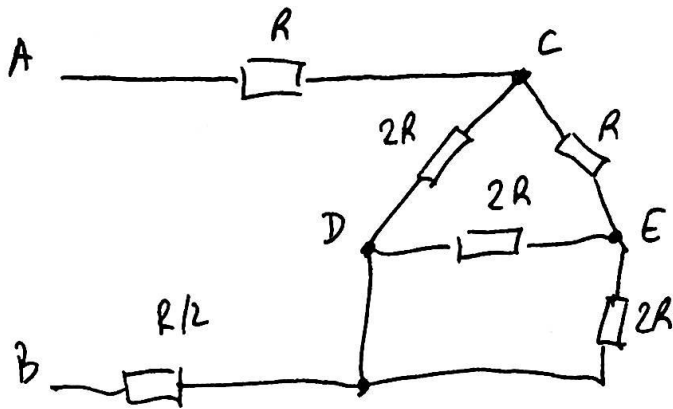


maintenant, il apparaît clairement que R_1 est en // avec R_2 , R_4 est en // avec R_3 et le groupement $(R_1 // R_2)$ est en série avec $(R_4 // R_3)$

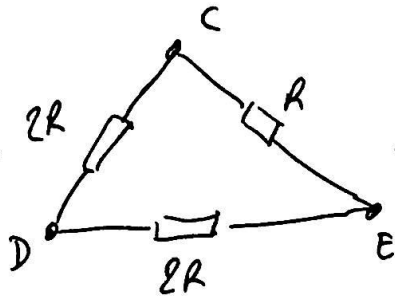


Nº 7

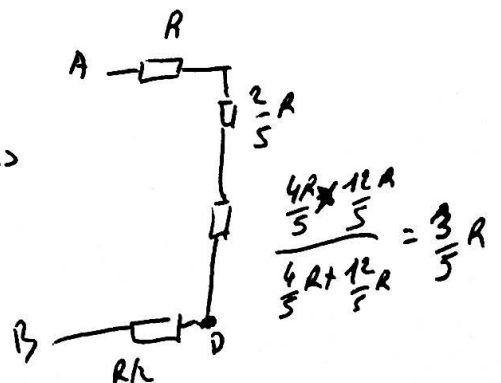
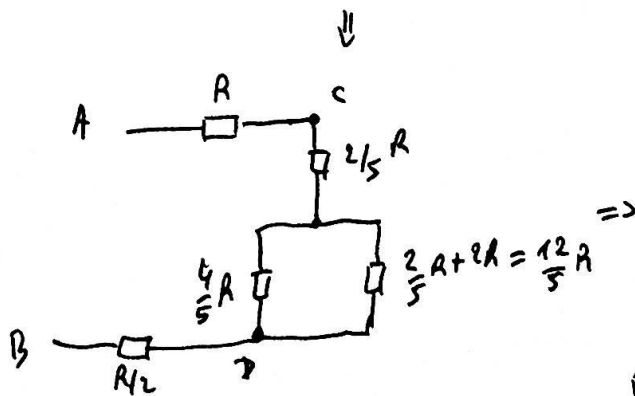
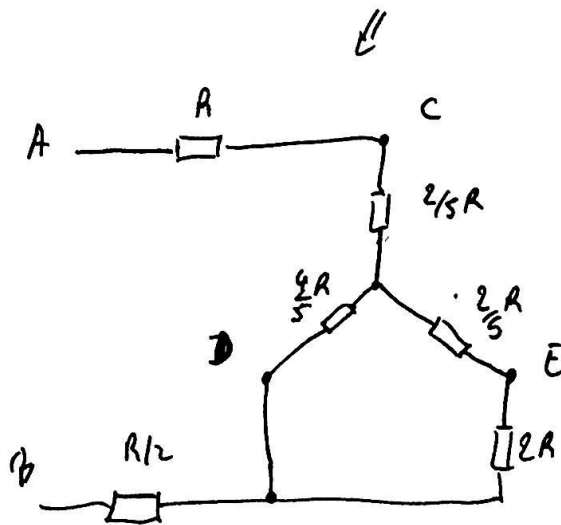
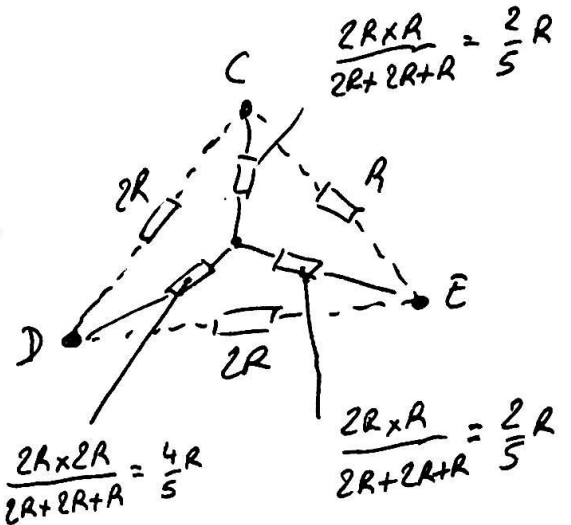
por KENNELLY



Kennelly's: $2R$

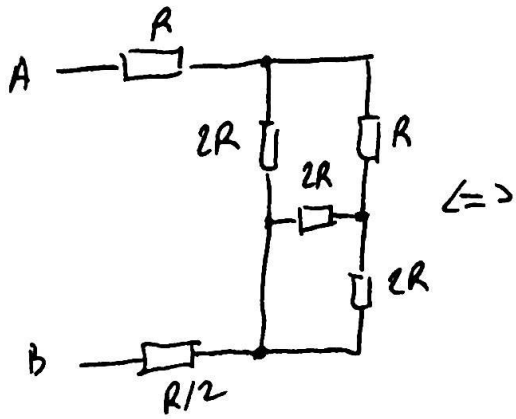


$\Rightarrow$

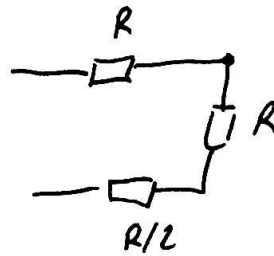
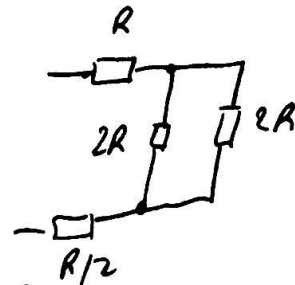
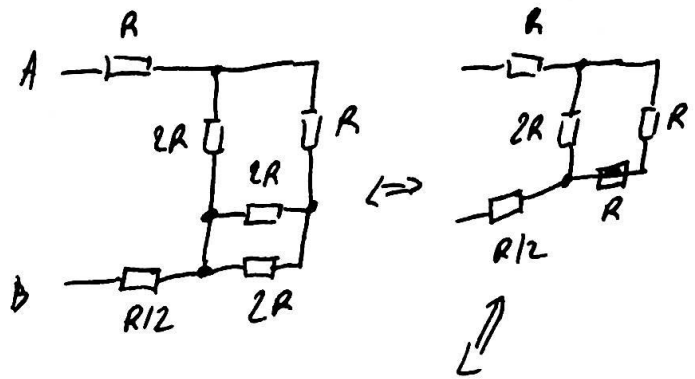


$$R_{42} = R + \frac{2}{5}R + \frac{3}{5}R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2}R$$

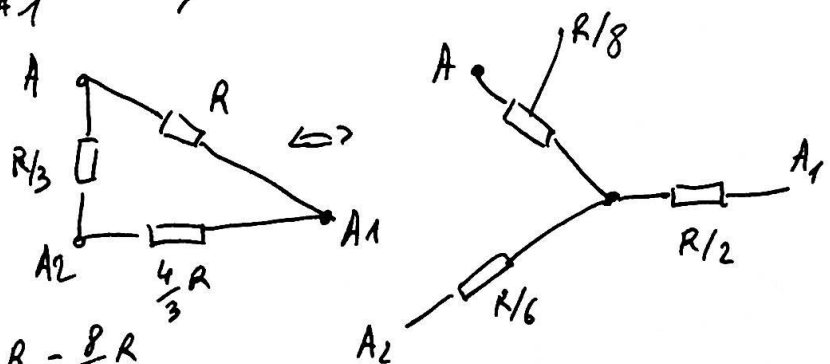
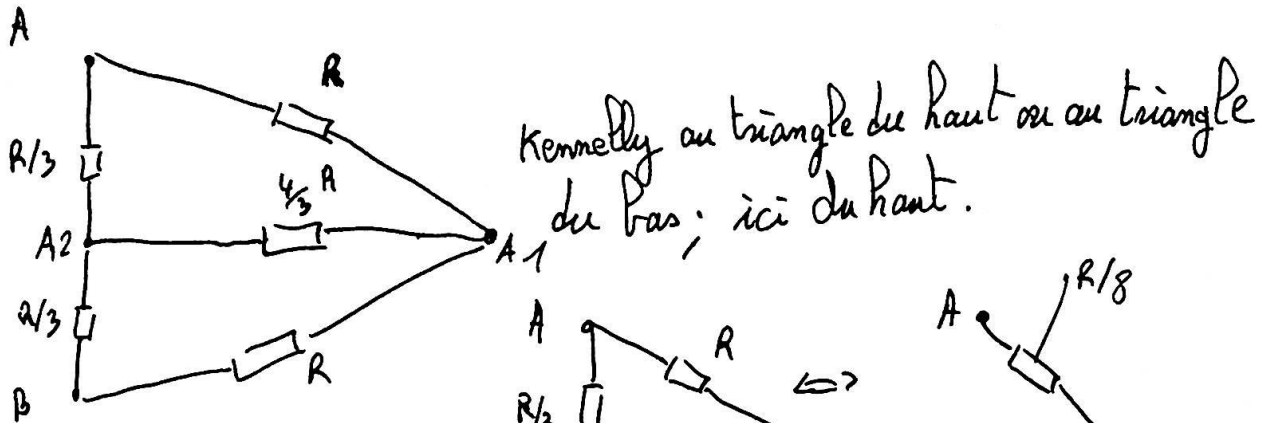
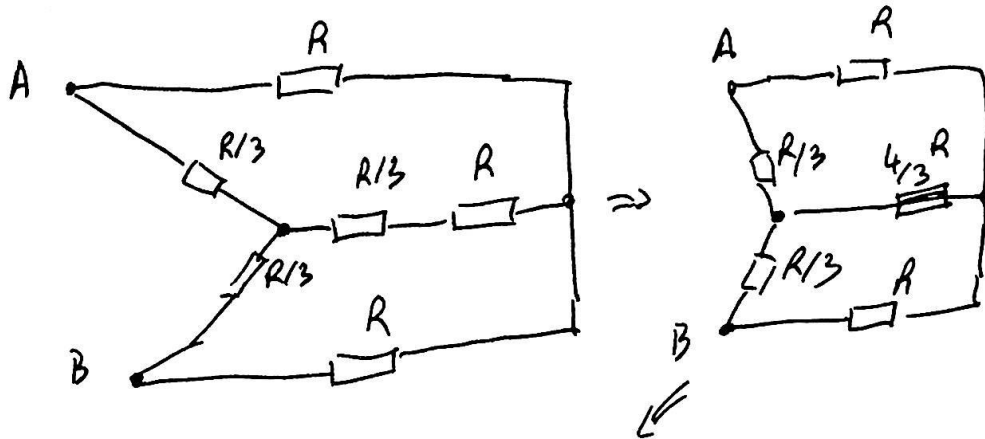
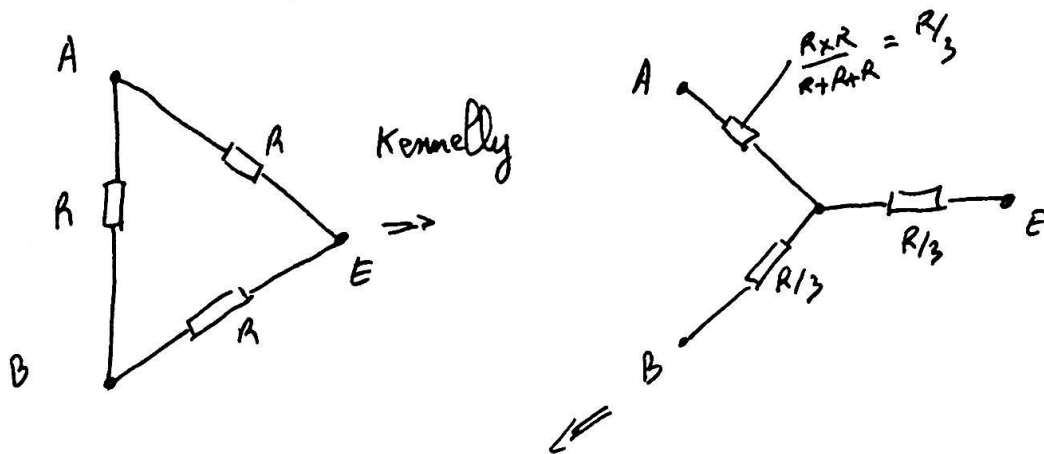
N° 7



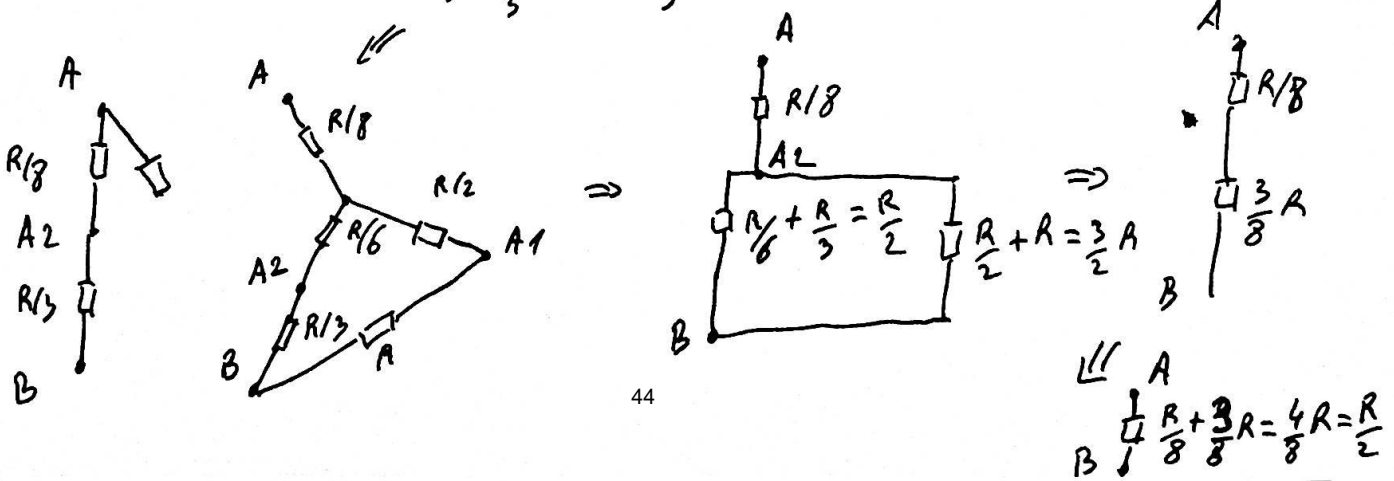
méthode 1



$$R + R + R/2 = \frac{5R}{2}$$

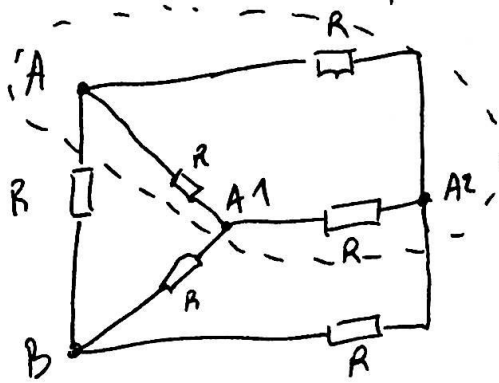


$$R/3 + \frac{4}{3}R + R = \frac{8}{3}R$$

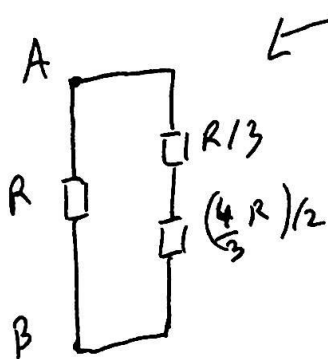
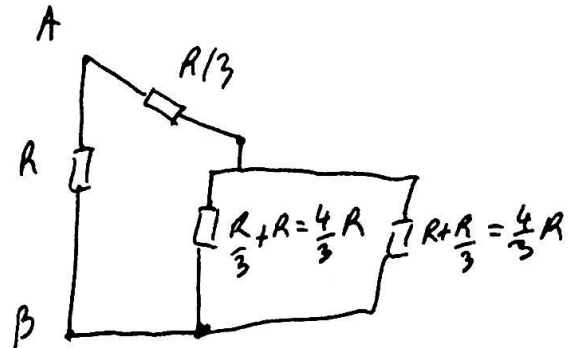
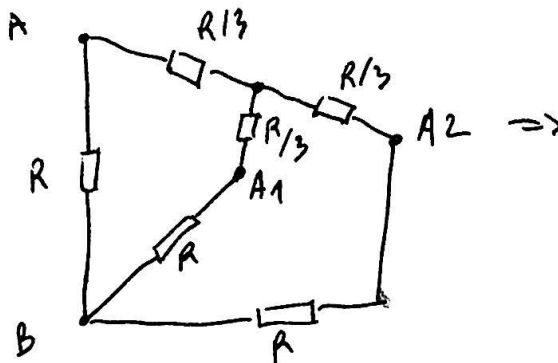


8 p 58

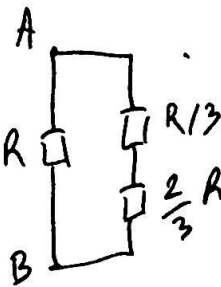
autre possibilité



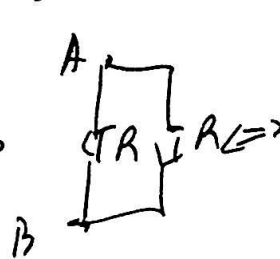
Kennelly au triangle en pointille



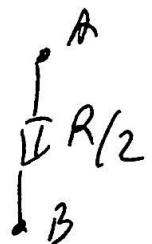
$\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$



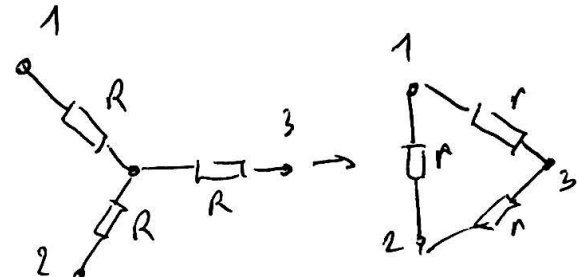
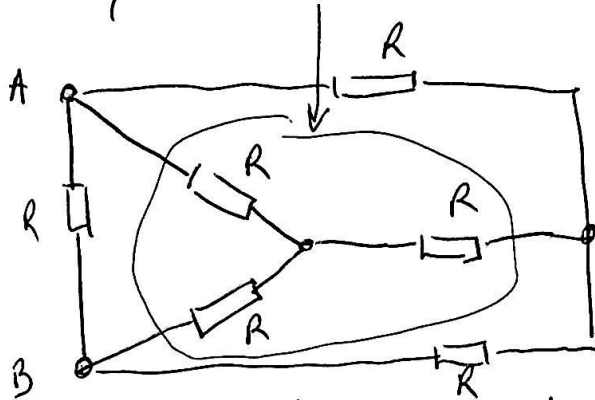
$\Leftrightarrow$



EXO 8

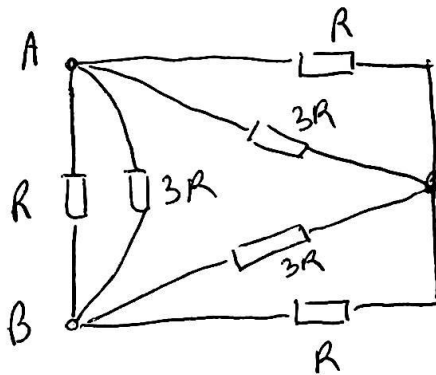
Résolution en utilisant la transformation $\star \rightarrow \Delta$

Il y a une étoile :

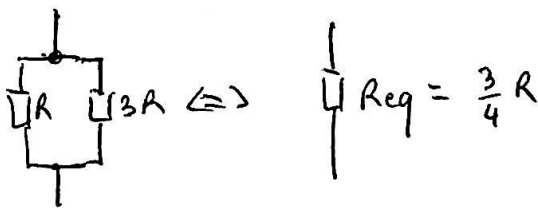
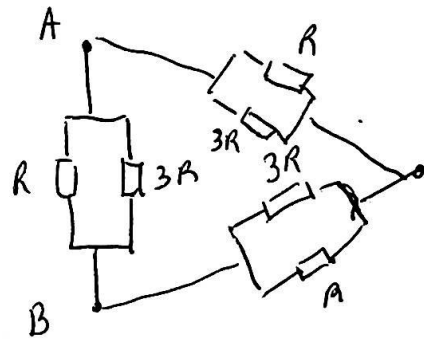


transformons-la en un triangle équivalent (formules p 50)

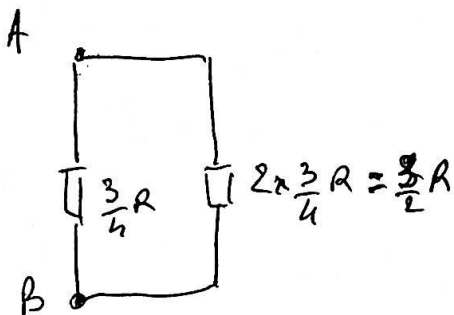
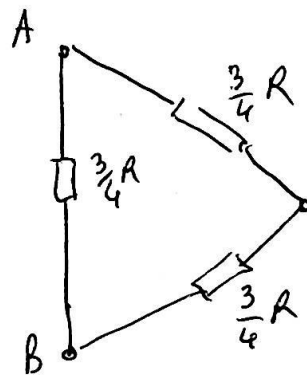
$$\text{ici } r_1 = r_2 = r_3 = r = \frac{3R^2}{R} = 3R$$



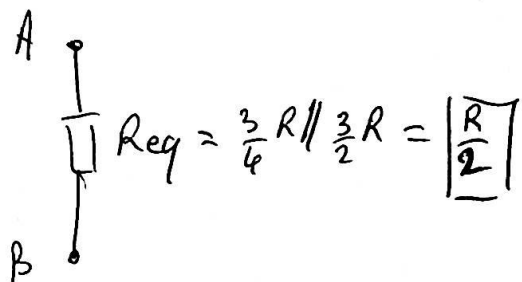
$\Leftrightarrow$



$\rightarrow$

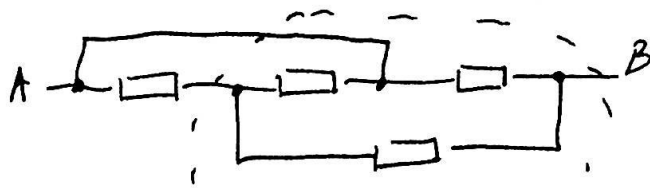


$\Rightarrow$

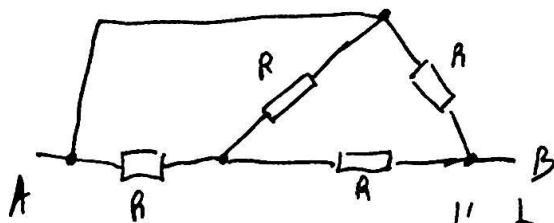


C'est l'un des très rares cas où la transformation $\star \rightarrow \Delta$ peut s'avérer utile !

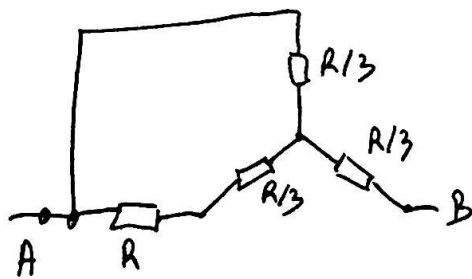
N° 11



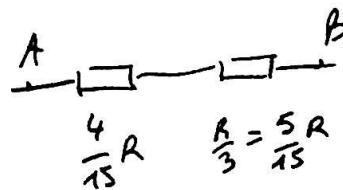
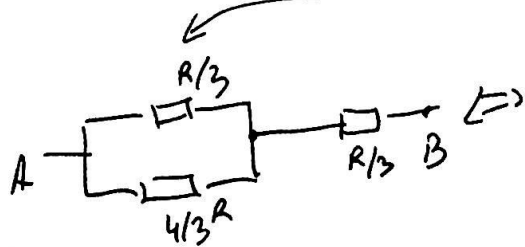
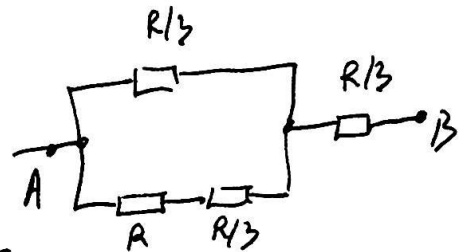
⇓ (Kennelly)
on distingue un triangle



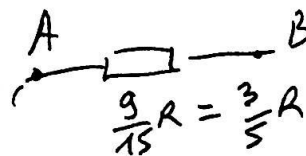
⇓ que l'on transforme en Y par Kennelly



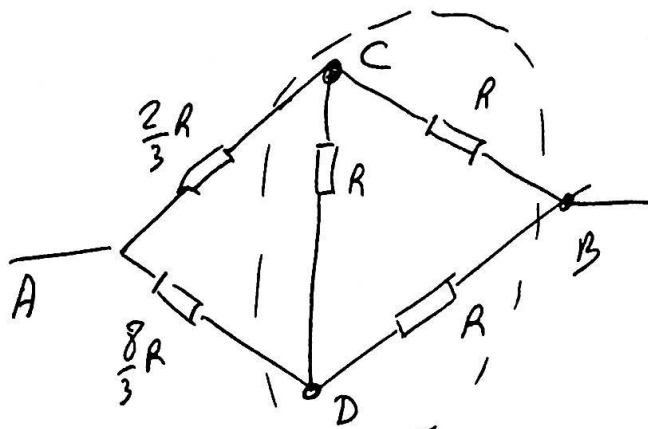
⇔



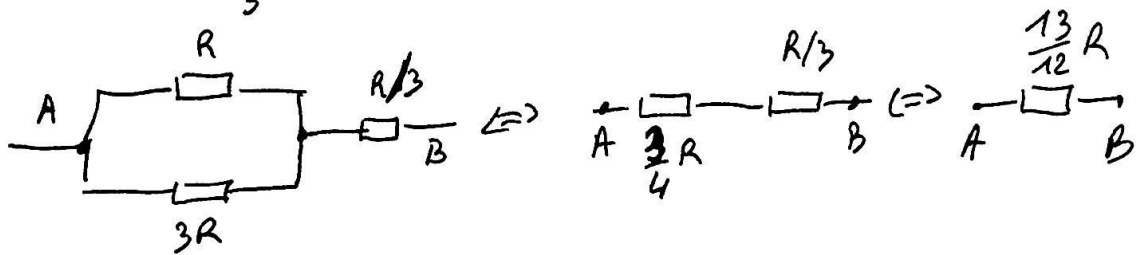
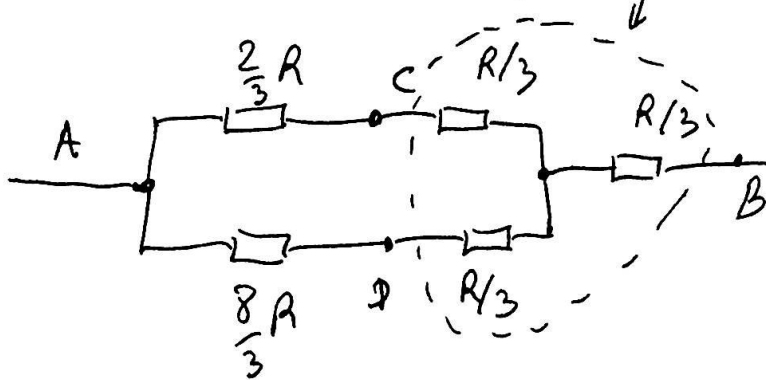
⇓



14

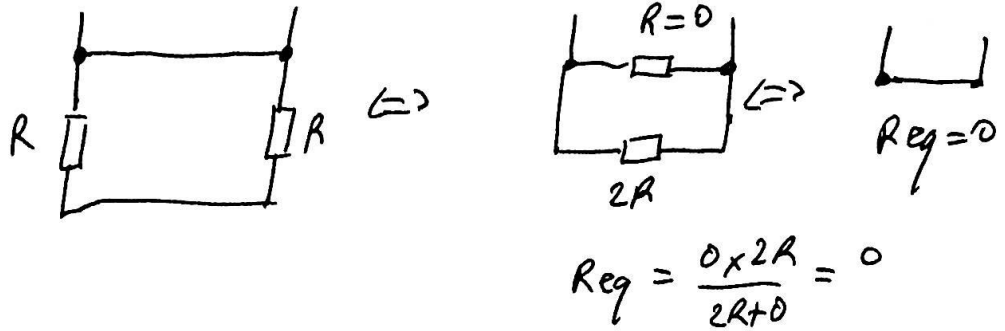


Kennelly au triangle en pointille



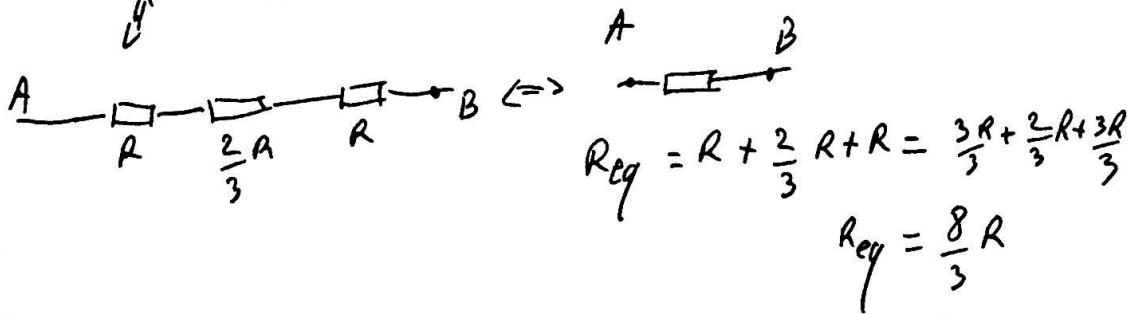
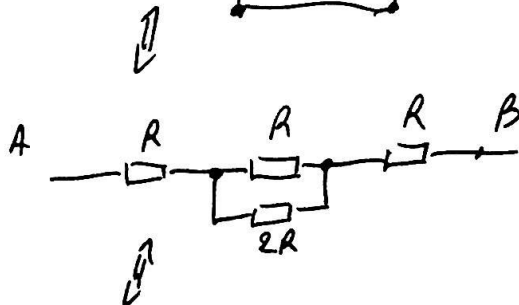
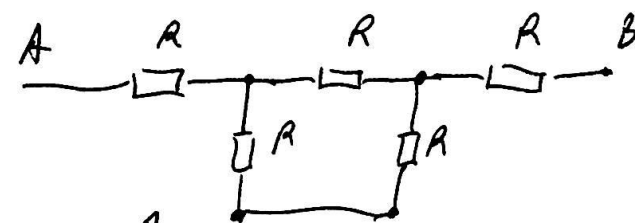
15

bas du schéma (c'est un petit piège !)

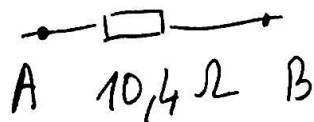
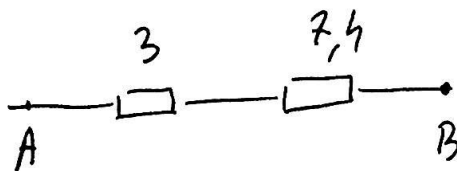
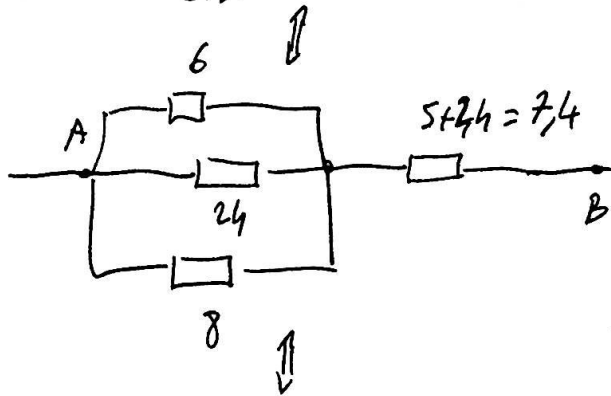
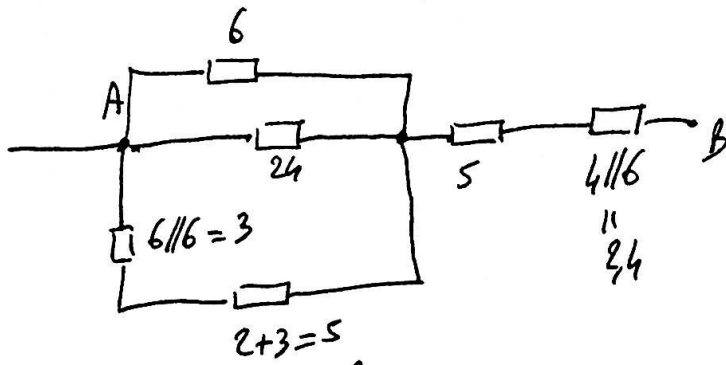


Une résistance court-circuitée = Résistance nulle !

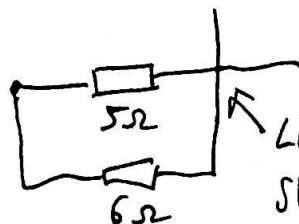
donc :



13



ATTENTION DANS LE SCHÉMA :

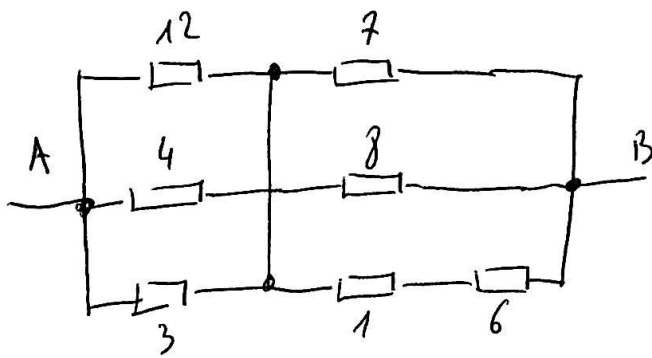


LES 2 FILS SE CROISENT SANS SE TOUCHER, IL N'Y A PAS DE POINT

UN POINT : $\cdot$ = SOUDURE CONTACT

PAS DE POINT : $+$ = PAS DE LIASON ELECTRIQUE ENTRE LES FILS

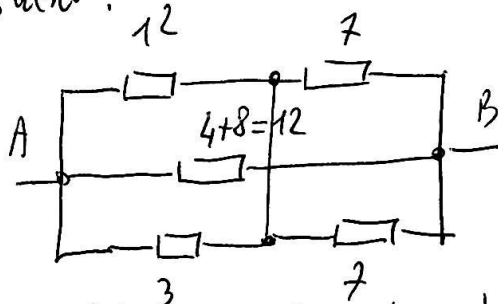
EXO 12



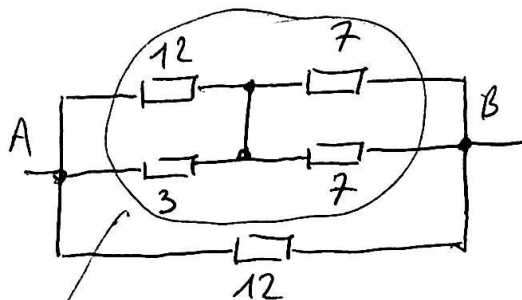
On regroupe tout d'abord les résistances en série, c'est à dire :

- branche du milieu 4 et 8 Ω
- branche du bas 1 et 6 Ω

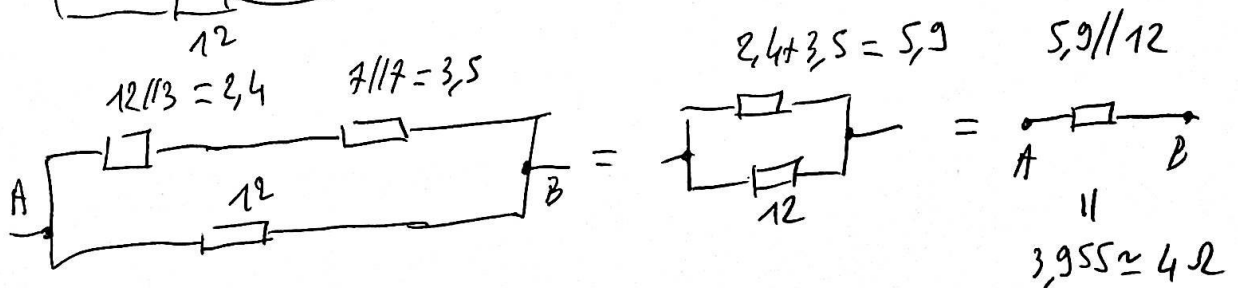
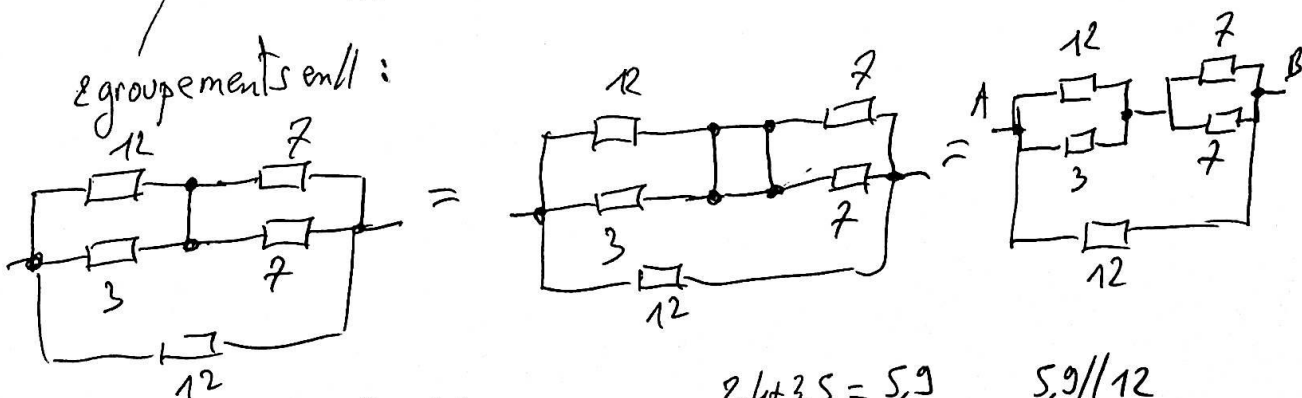
On obtient :



On intervertit branche du milieu et branche du bas :



2 groupements en // :



On branche un générateur de tension $U = 100\text{ V}$ aux bornes du réseau de résistances représenté sur la figure 1 et dans lequel toutes les résistances sont identiques et égales à 100Ω .

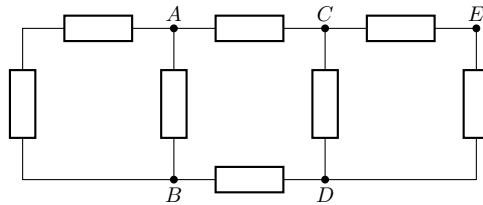


FIGURE 1 – Réseau de résistances

Calculer la résistance équivalente et le courant débité par le générateur de tension lorsqu'il est connecté :

1. aux nœuds A et B ;
2. aux nœuds C et D ;
3. aux nœuds E et D ;
1. le problème se simplifie en redessinant en ligne le réseau de résistances, comme montré sur la figure 2. Pour ce faire, on recense tous les chemins que le courant peut emprunter pour se rendre du point A au point B , en ne perdant pas de vue que le courant ne peut pas revenir en arrière. On considère par exemple que le point A est le point haut, le courant se dirigeant alors de A vers B . Dans notre cas, il y a trois chemins qui partent de A , et trois chemins qui arrivent en B . Le troisième chemin se subdivise en C , d'où deux chemins sont possibles pour arriver en D .

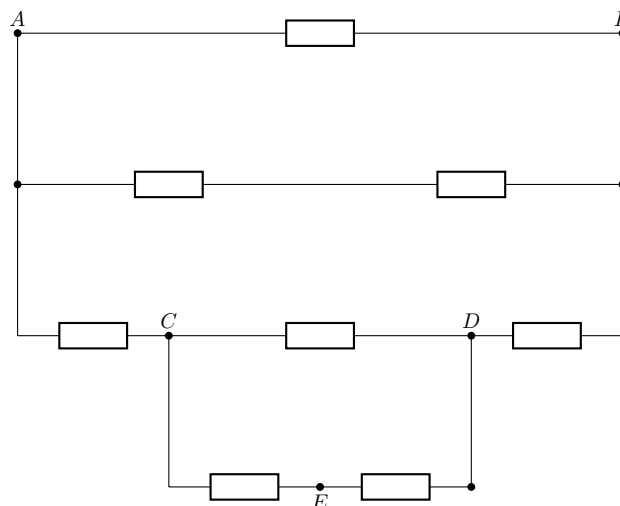


FIGURE 2 – Correction de l'exercice sur le réseau de résistances

Par la suite, il s'agit de déterminer la résistance de chaque branche, en remontant progressivement vers les points A et B pour évaluer la

résistance équivalente des trois chemins. On commence alors par regarder ce qui se passe entre les points C et D . On calcule :

$$R_{CD} = 100\,\Omega // 200\,\Omega = \frac{200 \times 100}{200 + 100} \simeq 66,7\,\Omega$$

Le troisième chemin est divisé entre C et D en un chemin via le point E et en un autre empruntant l'unique résistance de $100\,\Omega$; ce troisième chemin a donc une résistance :

$$R_3 = 100 + 66,7 + 100 \simeq 267\,\Omega$$

Les chemins 1 et 2 ont des résistances respectives $R_1 = 100\,\Omega$ et $R_2 = 200\,\Omega$. Finalement, la résistance entre A et B vaut :

$$R_{AB} = 100\,\Omega // 200\,\Omega // 267\,\Omega = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{267}} = 53,3\,\Omega$$

Ainsi, le générateur connecté aux bornes A et B voit une résistance de $53,3\,\Omega$. Il délivre alors un courant :

$$I = \frac{100}{53,3} = 1,88\,\text{A}$$

- On peut gagner beaucoup de temps en utilisant pour cette seconde partie le principe de symétrie. En effet, si l'on fait subir au circuit une rotation de 180° autour de son axe vertical en pointillé sur la figure 3, cela transforme les points A et B en C et D . La figure 3 montre que le circuit reste inchangé.

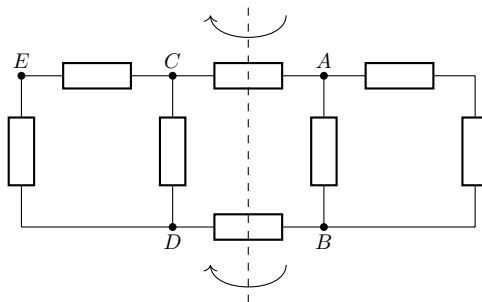


FIGURE 3 – Réseau de résistances

Ainsi, la résistance du circuit vu des bornes C et D est la même que celle du circuit vu des bornes A et B , que nous avons traitée dans la question précédente. On a donc $R_{CD} = 53,3\,\Omega$ et un courant délivré par le générateur $I = 1,88\,\text{A}$.

- Supposons que le courant aille de E à D . Il y a au départ de E deux chemins, et trois qui se rejoignent en D . Comme le montre la figure 4 [page suivante](#), le second chemin se subdivise en effet au niveau du point C .

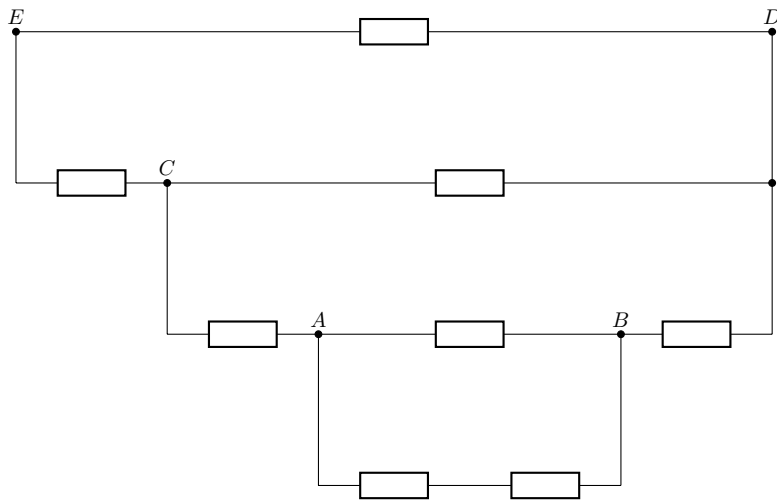


FIGURE 4 – Réseau de résistances

Dans un premier temps, il faut évaluer la résistance équivalente des branches contenues entre les points A et B . On obtient alors :

$$R_{AB} = 100\,\Omega // 200\,\Omega = 66,7\,\Omega$$

Le chemin qui part de C vers A a donc une résistance de $266,7\,\Omega$. La branche CD a donc une résistance de :

$$R_{CD} = 100\,\Omega // 267\,\Omega = 72,7\,\Omega$$

La résistance du chemin qui part de E vers C vaut donc :

$$R_2 = 100 + 72,7 \simeq 173\,\Omega$$

On en déduit donc :

$$R_{ED} = 100\,\Omega // 173\,\Omega = 63,4\,\Omega$$

Le générateur, connecté aux bornes E et D du circuit, voit cette fois une résistance de $6,34\,\Omega$ et fournit donc un courant $I = \frac{100}{63,4} = 1,58\,\text{A}$.

Puissance

Exercices

1. Puissances consommées par trois résistances en régime continu *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.6, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance délivrée par la source de tension. Vérifier le principe de la conservation de puissance à partir de ces résultats.

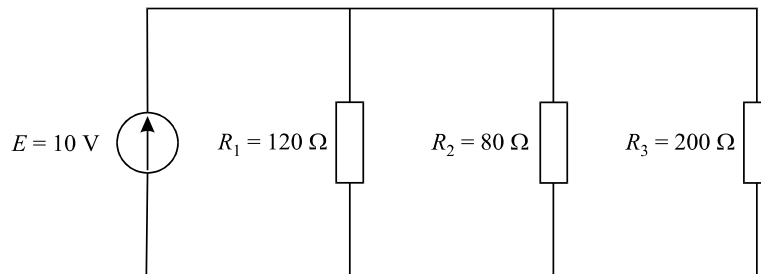


Figure 5.6

Conseil méthodologique

On remarquera que chaque résistance présente à ses bornes la même tension E . Il est alors facile d'exprimer la puissance consommée par chacune d'entre elles.

2. Puissances consommées dans un réseau de résistances en régime continu *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.7, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance fournie par le générateur de tension. Vérifier le principe de la conservation de l'énergie.

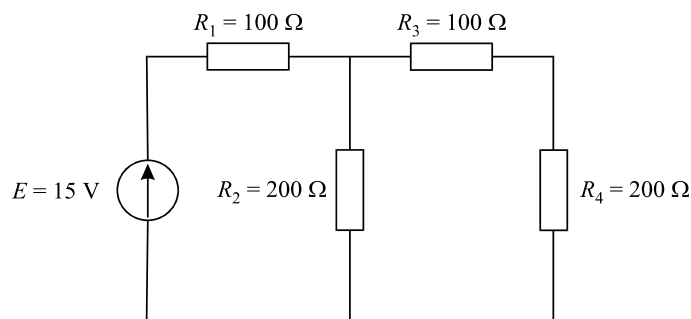


Figure 5.7

Conseil méthodologique

Pour connaître la puissance dissipée par une résistance, il est nécessaire d'évaluer la tension à ses bornes ou le courant qui la traverse. Dans cet exercice, l'accès aux différentes tensions ne pose aucune difficulté à partir du moment où l'on connaît le potentiel du point commun à R_1 , R_2 et R_3 .

3. Puissance délivrée par un générateur de courant continu *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.8, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance fournie par le générateur de courant.

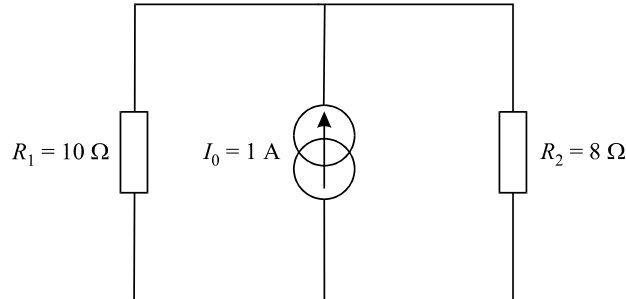


Figure 5.8

Conseil méthodologique

Il est conseillé, ici, de rechercher, en tout premier lieu, la valeur de la tension aux bornes des deux résistances.

4. Puissances consommées dans un circuit alimenté par deux générateurs continus *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.9, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance délivrée par chacun des deux générateurs. Vérifier le principe de la conservation de puissance dans ce circuit.

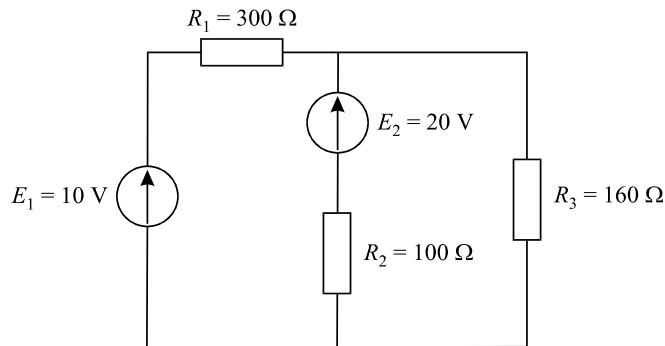


Figure 5.9

Conseil méthodologique

On accédera aux valeurs des différentes puissances en cherchant, par exemple, les intensités des courants circulant dans les résistances. Comme il y a deux générateurs, on utilisera le principe de superposition pour déterminer ces courants. Attention : le principe de superposition s'applique aux courants et aux tensions mais pas aux puissances qui ne sont pas des formes linéaires.

5. **Étude de la puissance consommée par une charge variable alimentée par un générateur de tension continue réel****

Le montage de la figure 5.10 représente un générateur réel de tension continue (force électromotrice E et résistance interne r) qui alimente une résistance variable R .

Calculer la puissance P dissipée dans la résistance R .

Pour quelle valeur de R cette puissance est-elle maximale ?

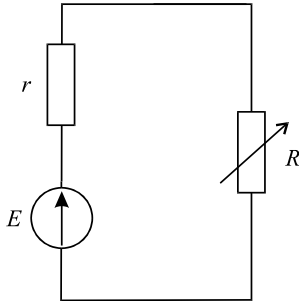


Figure 5.10

Conseil méthodologique

On calculera l'expression de la puissance dissipée en fonction des données de l'énoncé et notamment en fonction de R . On dérivera ensuite cette expression pour obtenir la condition recherchée.

Réponses

1. Soit P_1 , P_2 et P_3 les puissances dissipées respectivement dans chacune des trois résistances R_1 , R_2 et R_3 .

La même tension E étant appliquée aux bornes de chaque résistance, on a immédiatement :

$$P_1 = \frac{E^2}{R_1}, P_2 = \frac{E^2}{R_2}, P_3 = \frac{E^2}{R_3}$$

Par ailleurs, le générateur E débite dans une résistance équivalente R_{eq} telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

La puissance totale fournie par ce générateur vaut donc :

$$P_0 = \frac{E^2}{R_{eq}} = E^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

On a bien :

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3.$$

Application numérique :

$$P_1 = \frac{(10)^2}{120} = 0,83 \text{ W}$$

$$P_2 = \frac{(10)^2}{80} = 1,25 \text{ W}$$

$$P_3 = \frac{(10)^2}{200} = 0,5 \text{ W}$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{120} + \frac{1}{80} + \frac{1}{200}$$

Soit :

$$R_{eq} = 38,71 \Omega$$

On a donc :

$$P_0 = \frac{(10)^2}{38,71} = 2,58 \text{ W}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le calcul de la puissance consommée par une résistance, en régime continu, se calcule facilement à partir du moment où la tension à ses bornes est identifiée.

2. La différence de potentiel aux bornes d'une résistance, ou bien le courant qui la traverse, suffisent l'un comme l'autre à déterminer la puissance dissipée dans cette résistance. Soit P_1 , P_2 , P_3 et P_4 les puissances dissipées dans chacune des quatre résistances. Soit P_0 la puissance fournie par le générateur.

Calculons la tension au point A (figure 5.25), qui nous permettra dans un premier temps de déterminer la différence de potentiel aux bornes de R_1 et de R_2 . Appliquons pour cela le théorème de Millman au point A :

$$V_A = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}}$$

Soit :

$$V_A = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300}} = 8,2 \text{ V}$$

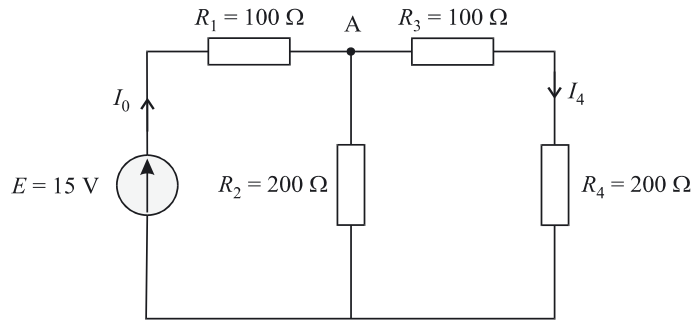


Figure 5.25

Cette tension V_A permet de calculer :

$$P_1 = \frac{(E - V_A)^2}{R_1} = 0,46 \text{ W}$$

$$P_2 = \frac{V_A^2}{R_2} = 0,34 \text{ W}$$

Soit I_4 le courant circulant dans les deux résistances R_3 et R_4 . On a :

$$I_4 = \frac{V_A}{R_3 + R_4}$$

D'où :

$$P_3 = R_3 I_4^2 = R_3 \left(\frac{V_A}{R_3 + R_4} \right)^2 = 0,07 \text{ W}$$

$$P_4 = R_4 I_4^2 = R_4 \left(\frac{V_A}{R_3 + R_4} \right)^2 = 0,15 \text{ W}$$

Calculons enfin le courant I_0 afin de déterminer la puissance P_0 :

$$I_0 = \frac{E - V_A}{R_1}$$

D'où :

$$P_0 = E I_0 = E \times \frac{E - V_A}{R_1}$$

Application numérique :

$$P_0 = 15 \times \frac{15 - 8,2}{100} = 1,02 \text{ W}$$

On peut vérifier sans peine que :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0,46 + 0,34 + 0,07 + 0,15 = 1,02 \text{ W} = P_0$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans cet exercice, on a fait le choix de déterminer les puissances consommées à partir des courants dans les résistances. On optera pour l'une ou l'autre méthode (courants ou tensions) en fonction de la morphologie du circuit et de la facilité avec laquelle on peut déterminer telles ou telles grandeurs. On notera par ailleurs qu'en vérifiant le principe de conservation de l'énergie, on dispose d'un moyen de s'assurer que les calculs sont justes.

3. Soient P_1 et P_2 les puissances dissipées respectivement dans R_1 et R_2 et soit P_0 la puissance fournie par le générateur de courant. Tout se passe comme si le générateur de courant débitait dans une résistance équivalente à l'association parallèle de R_1 et R_2 (figure 5.26).

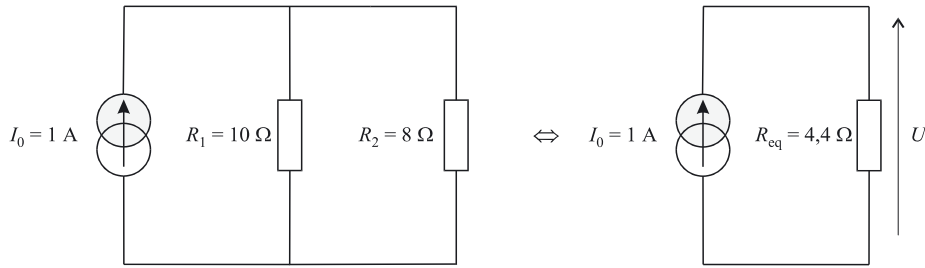


Figure 5.26

Cette résistance R_{eq} , égale à $4,4 \Omega$, présente à ses bornes une différence de potentiels $U = R_{eq}I_0 = 4,4 \text{ V}$. Cette différence de potentiel U est présente aux bornes de chaque résistance, ainsi qu'aux bornes du générateur de courant. On a donc :

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = 1,98 \text{ W}$$

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = 2,42 \text{ W}$$

$$P_0 = UI_0 = 4,4 \text{ W}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On peut être dérouté, de prime abord, par la présence d'un générateur de courant mais en réalité, le calcul de la puissance fournie par un générateur de courant ne pose pas plus de difficulté que dans le cas du générateur de tension. La puissance fournie est toujours égale au produit du courant par la tension apparaissant aux bornes du générateur.

4. Dans le circuit complet, appelons I_1 , I_2 et I_3 les courants dans chacune des trois résistances. Appelons I'_1 , I'_2 et I'_3 les courants dus à la seule présence du générateur E_1 et I''_1 , I''_2 et I''_3 les courants dus à la seule présence de E_2 . Nous avons bien sûr :

$$I_1 = I'_1 + I''_1$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3$$

Dans un premier temps, calculons I'_1 , I'_2 et I'_3 en court-circuitant E_2 (figure 5.27).

Appliquons le théorème de Millman au point A. La connaissance du potentiel en ce point nous donnera effectivement accès aux courants recherchés.

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{10}{300}}{\frac{1}{300} + \frac{1}{100} + \frac{1}{160}} = 1,7 \text{ V}$$

On en déduit immédiatement les valeurs des courants recherchés :

$$I'_1 = \frac{E_1 - V_A}{R_1} = \frac{10 - 1,7}{300} = 28 \text{ mA}$$

$$I'_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{1,7}{100} = 17 \text{ mA}$$

$$I'_3 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{1,7}{160} = 11 \text{ mA}$$

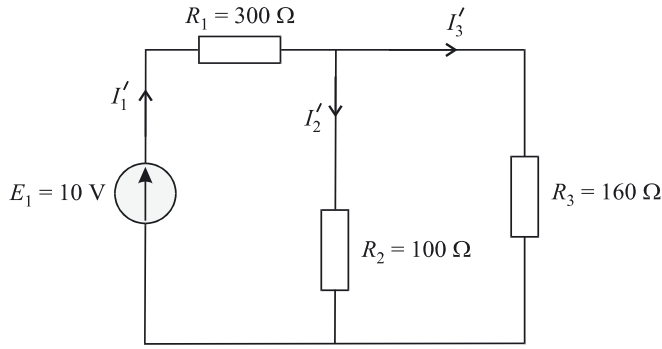


Figure 5.27

Dans un deuxième temps, calculons I_1'' , I_2'' et I_3'' en court-circuitant E_1 (figure 5.28). De manière à faciliter l'application du principe de superposition, nous placerons les trois courants dus à E_2 dans le même sens que les courants dus à E_1 .

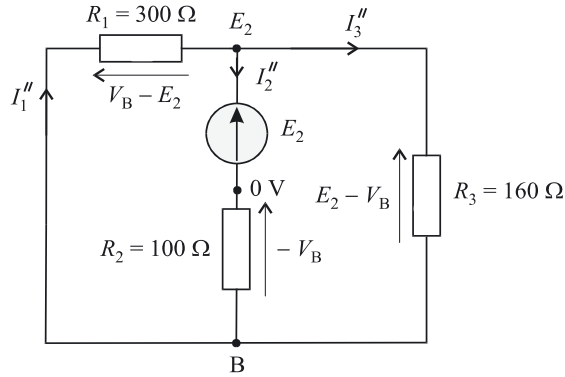


Figure 5.28

La borne négative du générateur servant de référence de potentiel, les tensions se placent comme indiquées sur la figure 5.28. Nous remarquons que la connaissance de V_B donne accès aux valeurs des trois courants.

Appliquons le théorème de Millman au point B :

$$V_B = \frac{\frac{E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{20 \times \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{160} \right)}{\frac{1}{300} + \frac{1}{100} + \frac{1}{160}} = 9,8 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} I_1'' &= \frac{V_B - E_2}{R_1} = \frac{-10,2}{300} = -34 \text{ mA} \\ I_2'' &= \frac{-V_B}{R_2} = \frac{-9,8}{100} = -98 \text{ mA} \\ I_3'' &= \frac{E_2 - V_B}{R_3} = \frac{10,2}{160} = 64 \text{ mA} \end{aligned}$$

Appliquons le principe de superposition :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' = 28 \times 10^{-3} - 34 \times 10^{-3} = -6 \text{ mA} \\ I_2 &= I_2' + I_2'' = 17 \times 10^{-3} - 98 \times 10^{-3} = -81 \text{ mA} \\ I_3 &= I_3' + I_3'' = 11 \times 10^{-3} + 64 \times 10^{-3} = 75 \text{ mA} \end{aligned}$$

On peut donc finalement calculer les puissances P_1 , P_2 et P_3 dissipées respectivement dans R_1 , R_2 et R_3 :

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 300 \times (-6 \times 10^{-3})^2 = 0,011 \text{ W}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = 100 \times (-81 \times 10^{-3})^2 = 0,66 \text{ W}$$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 160 \times (75 \times 10^{-3})^2 = 0,9 \text{ W}$$

Vérifions à présent le principe de la conservation de l'énergie : l'ensemble des puissances fournies par les éléments qui délivrent effectivement une puissance doit être égal à la somme des puissances consommées par les autres éléments.

Le générateur E_2 fournit une puissance égale à :

$$P_{E_2} = E_2 (-I_2) = 20 \times 81 \times 10^{-3} = 1,62 \text{ W}$$

Le sens du courant réel circulant dans la branche de E_2 montre bien qu'il se comporte effectivement comme un générateur.

Le générateur E_1 , quant à lui, fournit une puissance :

$$P_{E_1} = E_1 I_1 = 10 \times (-6 \times 10^{-3}) = -0,06 \text{ W}$$

Fournissant une puissance négative, le générateur E_1 ne se comporte pas comme un générateur, mais comme un récepteur. Il consomme donc une puissance égale à 0,06 W .

Le principe de la conservation de la puissance est bien vérifié puisque :

$$P_1 + P_2 + P_3 + (-P_{E_1}) = 0,011 + 0,66 + 0,9 + 0,06 = 1,63 \text{ W} = P_{E_2}$$

La différence de 0,01 W n'est due qu'aux erreurs d'arrondis successifs que nous avons commises au cours des calculs.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice contient un piège très dangereux : on est en effet très tenté d'utiliser le principe de superposition pour résoudre le problème. Or le principe de superposition est une conséquence directe de la linéarité du circuit et la puissance n'est pas une forme linéaire. On ne peut en aucun cas écrire que la puissance dans une résistance est la somme des deux puissances dues chacune à la présence d'un des deux générateurs. On utilise certes, le principe de superposition, mais pour déterminer le courant dans chaque résistance. Nous effectuons le calcul des puissances dissipées lorsque nous disposons des valeurs de ces courants.

5. Soit I le courant qui circule dans le circuit. On a évidemment :

$$I = \frac{E}{r + R}$$

La puissance dissipée dans la résistance r est donc :

$$P = RI^2 = \frac{RE^2}{(r + R)^2}$$

Pour calculer la valeur de R pour laquelle cette puissance P est maximale, dérivons l'expression de P par rapport à R :

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{d}{dR} \left[\frac{R}{(r + R)^2} \right] = E^2 \frac{(r + R)^2 - 2R(r + R)}{(r + R)^4}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= E^2 \frac{r^2 + 2rR + R^2 - 2Rr - 2R^2}{(r + R)^4} \\ \frac{dP}{dR} &= E^2 \frac{r^2 - R^2}{(r + R)^4} = E^2 \frac{r - R}{(r + R)^3} \end{aligned}$$

La puissance P sera maximale pour $\frac{dP}{dR} = 0$, soit $R = r$.

Il ne peut s'agir que d'un maximum, et non d'un minimum, puisque la dérivée de P est positive pour $R < r$ (fonction P croissante) et négative pour $R > r$ (fonction P décroissante).

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans un circuit résistif alimenté par une source réelle, la puissance fournie par la source est maximale lorsque la résistance du circuit est égale à la résistance interne de la source.

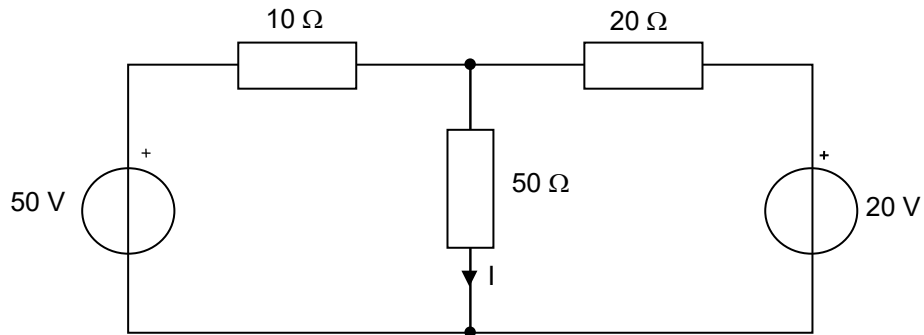
Kirchhoff

Générateurs de tension

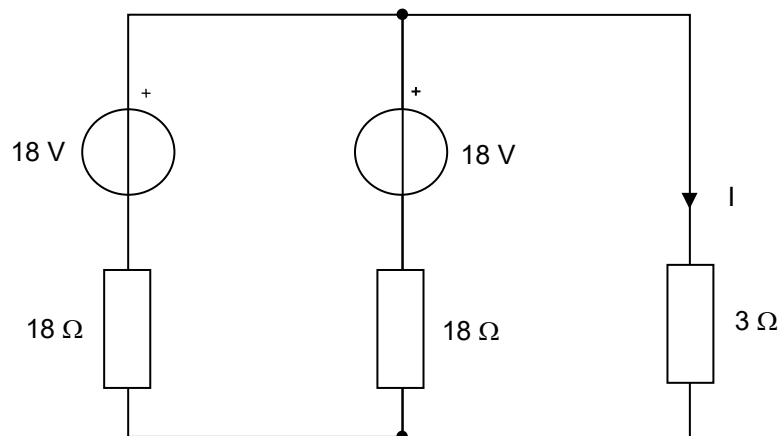
Générateurs de courant

Exercices

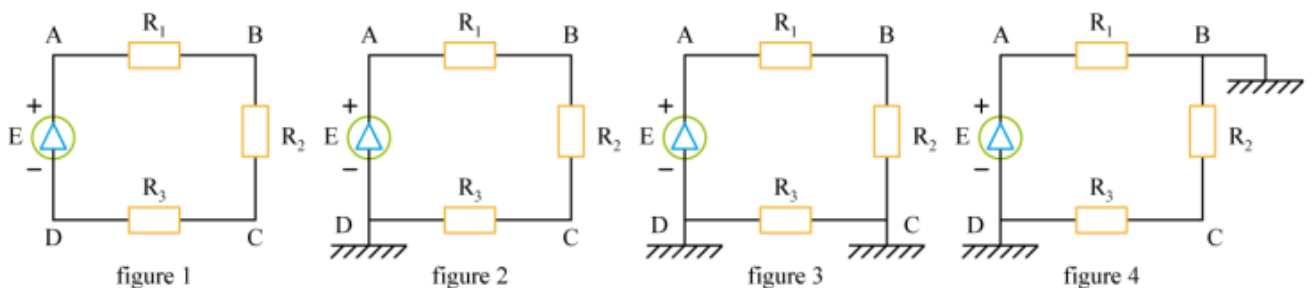
1. Calculer I



2. Calculer I



3.



a) Circuit de la figure 1 : calculez l'intensité du courant qui le traverse, ainsi que les différences de potentiel $V_A - V_D$, $V_B - V_D$ et $V_C - V_D$.

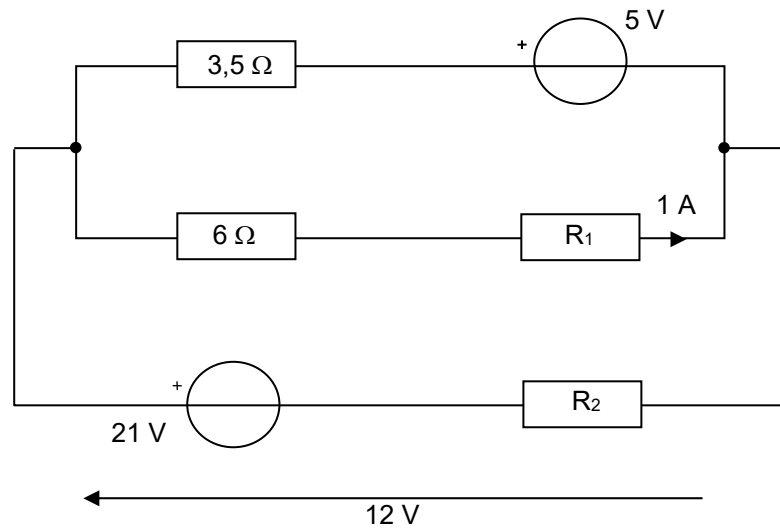
b) Circuit de la figure 2 : Le point D est mis à la masse : $V_D = 0$. En prenant le potentiel de ce point comme référence, donnez la valeur des potentiels V_A , V_B et V_C .

c) Circuit de la figure 3 : Le point C est également porté à la masse. Donnez l'intensité du courant traversant R_3 , et calculez les potentiels V_A , V_B et V_C .

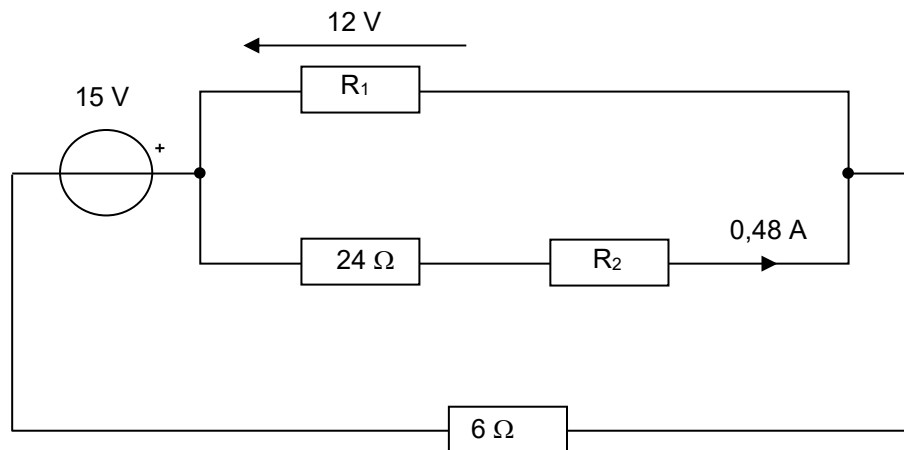
d) Circuit de la figure 4 : Le point B est mis à la masse à la place de C. Mêmes questions qu'en c).

4. Calculer R_1 et R_2 :

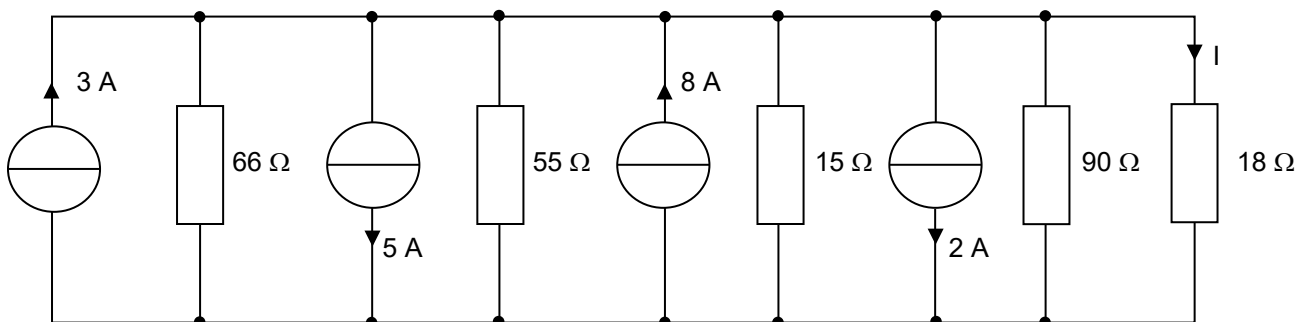
4.1.



4.2.



5. Calculer I dans la résistance de 18Ω :



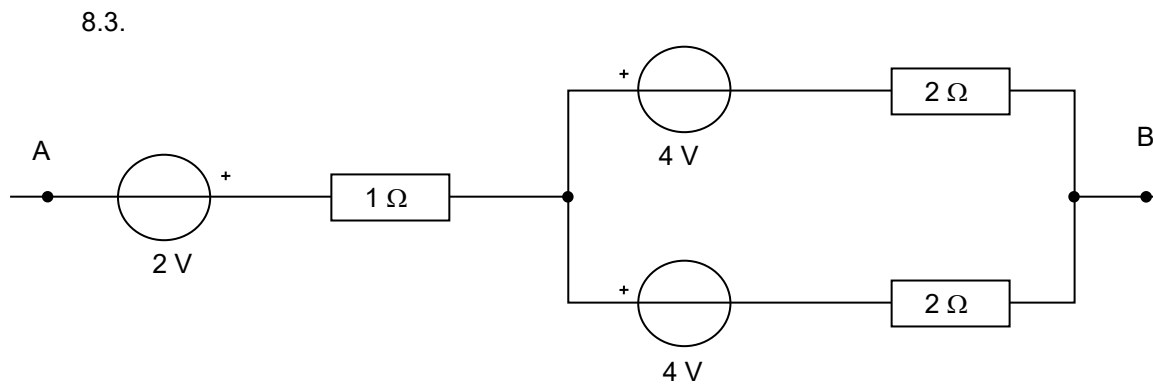
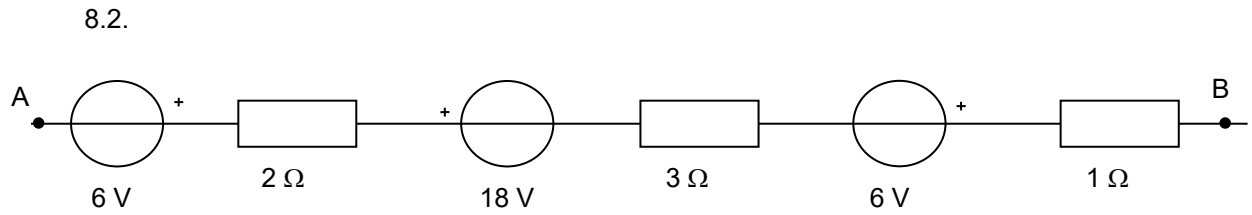
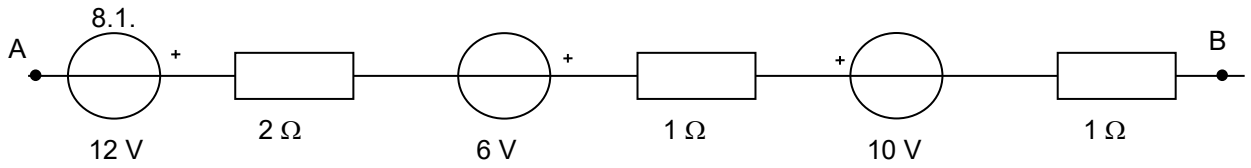
6. Soit un générateur de f.é.m. $E = 100\text{ V}$ et de résistance interne r . Déterminer la résistance interne r afin d'obtenir un rendement de :

- 80 % sous 1 A.
- 80 % sous 2 A.
- 90 % sous 1 A.

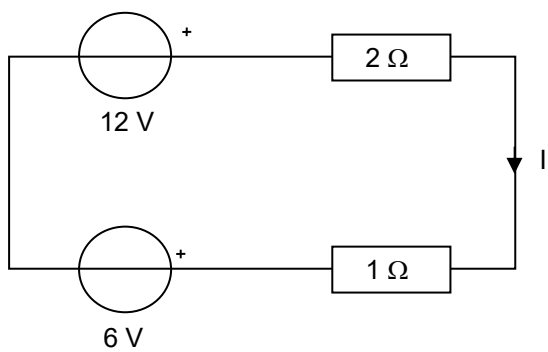
- 90 % sous 2 A.

7. Soit un générateur de tension de f.é.m. $E = 80 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 2 \Omega$. Déterminer l'ensemble des valeurs de l'intensité débitée par le générateur pour obtenir un rendement supérieur à 90 %.

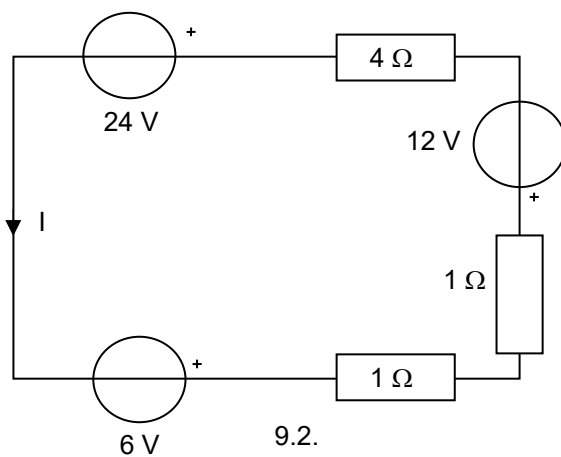
8. Déterminer les générateurs équivalents entre les points A et B :



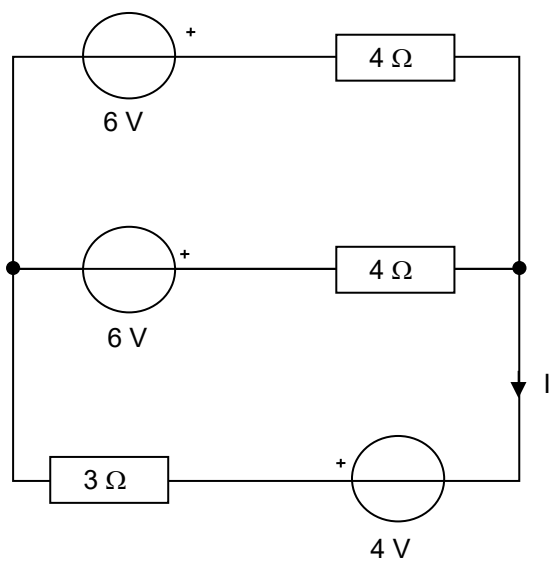
9. Calculer le courant I , classer les appareils en générateurs et en récepteurs :



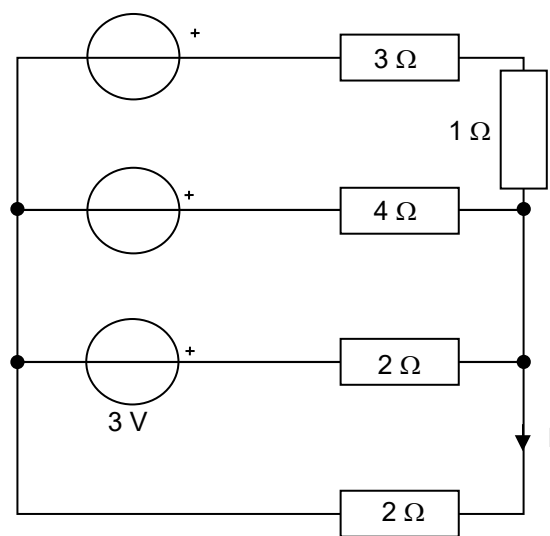
9.1.



9.2.



9.3.



9.4.

10. Déterminer le courant I dans le schéma de la Figure 35.

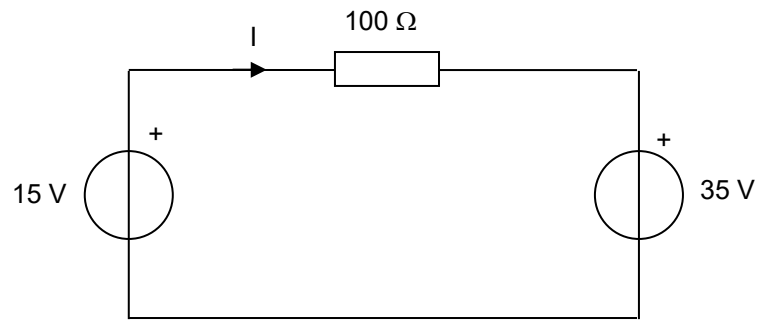


Figure 35

11. Calculer la tension U aux bornes du générateur de courant dans le schéma de la Figure 36. Quel est le courant dans la résistance de $50\ \Omega$?

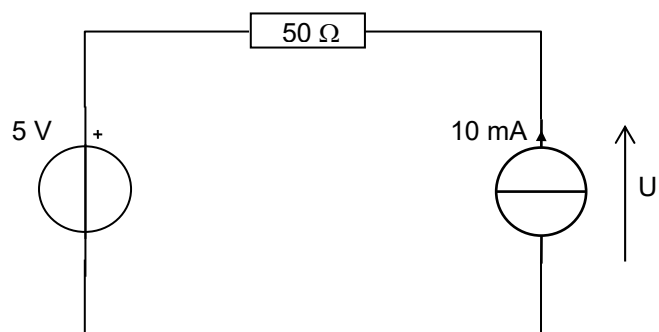


Figure 36

12. Déterminer la tension U et le courant I dans le schéma de la Figure 37.

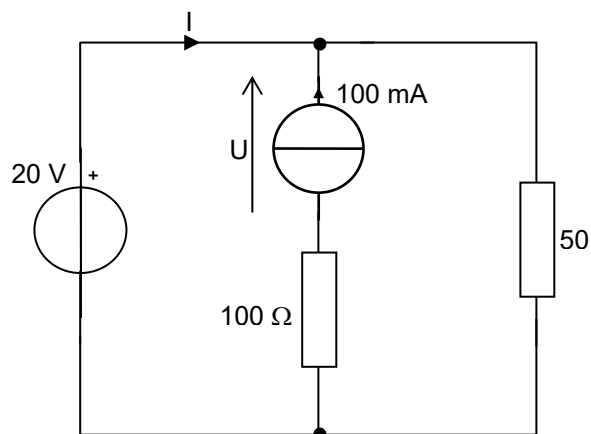


Figure 37

SOLUTIONS

1 Exercice n° 1

On demande de calculer l'intensité I dans le circuit suivant :

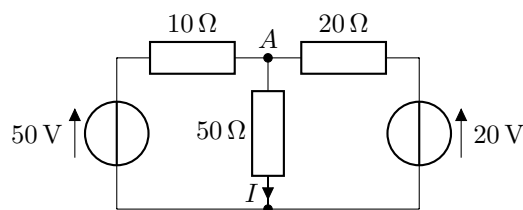


FIGURE 1: Exercice n° 1.

1.1 Première méthode de résolution : par des transformations dipôles de tension - dipôles de courant et réciproquement

Dans le circuit de la figure 1, transformons les dipôles de tension ($50\text{ V} - 10\ \Omega$) et ($20\text{ V}, 20\ \Omega$) en dipôles de courant, on obtient :

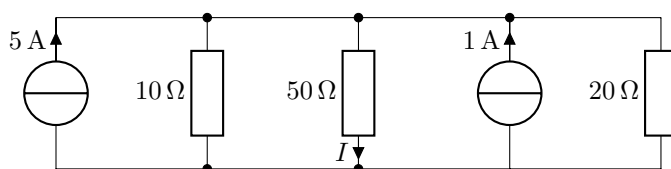


FIGURE 2: Exercice n° 1 première étape de la résolution.

Regroupons les générateurs de courants idéaux et les résistances de $10\ \Omega$ et $20\ \Omega$:

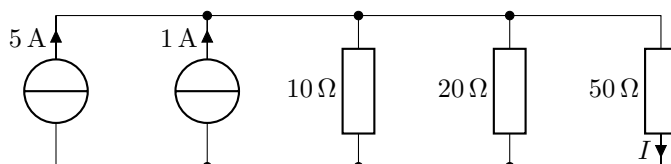


FIGURE 3: Exercice n° 1 deuxième étape de la résolution.

Fusionnons les générateurs de courant et les résistances de $10\ \Omega$ et $20\ \Omega$ en leurs équivalents :

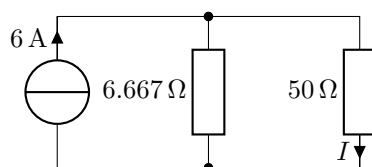


FIGURE 4: Exercice n° 1 troisième étape de la résolution.

Pour l'instant, nous ne savons pas calculer l'intensité dans un tel circuit, transformons le dipôle de courant ($6\text{ A} - 6.667\,\Omega$) en un dipôle de tension équivalent, comme le montre la figure 5

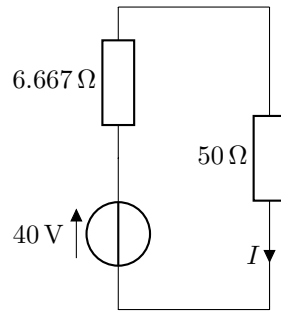


FIGURE 5: Exercice n° 1 quatrième étape de la résolution.

Nous pouvons fusionner les deux résistances de $6.667\,\Omega$ et $50\,\Omega$ en leur résistance équivalente, comme le montre la figure 6

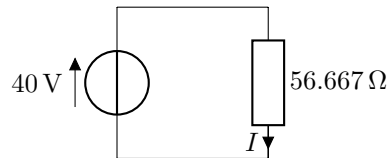


FIGURE 6: Exercice n° 1 cinquième étape de la résolution.

Appliquons la loi d'Ohm à la résistance $56.667\,\Omega$. Nous obtenons l'intensité cherchée :

$$I = \frac{40}{56,667} \simeq 0.70\text{ A}$$

1.2 Deuxième résolution : par le théorème de Millman

À l'aide du théorème de Millman, il est facile de déterminer le potentiel du point A de la figure 1 page précédente par rapport à la partie basse du circuit :

$$V_A = \frac{\frac{50}{10} + \frac{0}{50} + \frac{20}{20}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{20}} \simeq 35.29\text{ V}$$

Il suffit ensuite d'appliquer la loi d'Ohm à la résistance de $50\,\Omega$ dont nous connaissons maintenant la d.d.p. :

$$I \simeq \frac{35,29}{50} \simeq 0.70\text{ A}$$

Solutions :

exo 1 : 1. $I = \frac{12}{17} \text{ A}$

exo 2 : 2. $I = \frac{3}{2} \text{ A}$

exo 3 : Circuit 1 : il ne contient aucun point de masse, donc on ne peut connaître la valeur du potentiel en chaque point, mais seulement la différence de potentiel entre deux points.

Le courant I passe successivement dans R_1 , puis R_2 , puis R_3 , dans le sens $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$.

La loi des mailles donne immédiatement : $I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$

et les différences de potentiel s'obtiennent en multipliant chaque résistance par I :

$$V_A - V_B = \frac{R_1 \cdot E}{R_1 + R_2 + R_3}, V_B - V_C = \frac{R_2 \cdot E}{R_1 + R_2 + R_3}, V_C - V_D = \frac{R_3 \cdot E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

et donc $V_A - V_D = E$ et $V_B - V_D = \frac{(R_2 + R_3) \cdot E}{R_1 + R_2 + R_3}$

Circuit 2 : Le potentiel de D est fixé à celui de la masse, soit arbitrairement à zéro. Le courant continue à traverser R_1 , R_2 et R_3 comme dans le circuit 1, donc I garde la même expression.

On peut donc reprendre les expressions précédentes pour les différences de potentiel, en y faisant simplement $V_D = 0$, ce qui donne

$$V_C = \frac{R_3 \cdot E}{R_1 + R_2 + R_3}, V_B = \frac{(R_2 + R_3) \cdot E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Circuit 3 : les points C et D étant reliés à la masse sont au même potentiel, donc la résistance R_3 n'est parcourue par aucun courant. Le courant qui sort de R_2 va directement de C à D en suivant le fil de masse. Tout se passe donc comme si la résistance R_3 n'était plus dans le circuit et était remplacée par un fil sans résistance.

On obtient donc les expressions de I , V_A , V_B et V_C en reprenant les expressions précédentes et en y faisant $R_3 = 0$, soit

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}, V_D = 0, V_C = 0, V_B = \frac{R_2 \cdot E}{R_1 + R_2}, V_A = E$$

Exo 4 : même explication, mais ici ce sont les résistances R_2 et R_3 qui sont court-circuitées par le fil de masse : le courant sortant de R_1 va directement de B à D sans passer par les résistances R_2 et R_3 .

Pour obtenir les nouvelles expressions du courant et des potentiels, on annule donc R_2 et R_3 dans les expressions obtenues pour les circuits 1 ou 2, soit :

$$I = \frac{E}{R_1}, V_D = 0, V_C = 0, V_B = 0, V_A = E$$

Remarque importante : Il faut toujours avoir en tête que des masses représentées comme séparées, différentes, sur un schéma sont en fait interconnectées.

exo 4.1 : $R_1 = 6 \Omega$ et $R_2 = 3 \Omega$.

exo 4.2 : $R_1 = 600 \Omega$ et $R_2 = 1 \Omega$.

exo 5 : $I = \frac{4}{3} \text{ A}$

exo 6 : Calculons le rendement : $\eta = \frac{E \times I - r \cdot I^2}{E \times I} \Rightarrow r = \frac{E \times I (1 - \eta)}{I^2}$.

On trouve ainsi respectivement 20Ω , 10Ω , 10Ω , et 5Ω .

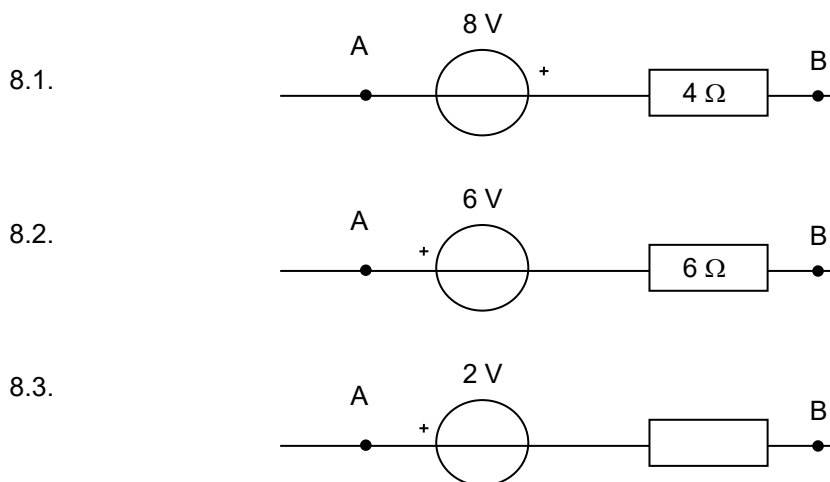
exo 7 : Calculons le rendement : $\eta = \frac{E \times I - r \cdot I^2}{E \times I}$. En supposant I tel que le rendement soit de 90

$$\%, \text{ l'équation à résoudre est : } 0,9 = \frac{80 \cdot I - 2 \cdot I^2}{80 \cdot I} \Rightarrow 2 \cdot I^2 - 8 \cdot I = 0 \Rightarrow 2 \cdot I (I - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ I = 4 \end{cases}$$

La solution à retenir est évidemment $I = 4 \text{ A}$ ($I = 0 \text{ A}$ n'offre aucun intérêt). Un calcul simple (si

$$I = 1 \text{ A}, \eta = \frac{80 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{80 \cdot 1} = \frac{78}{80} = 97,5\%) \text{ montre que l'on doit choisir : } I < 4 \text{ A.}$$

exo 8 :



exo 9 : 9.1. $I = 2 \text{ A}$

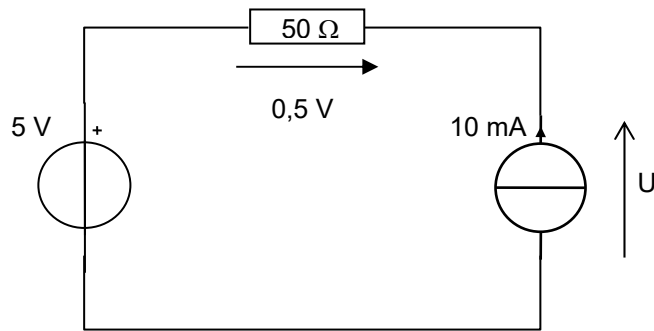
9.2. $I = -5 \text{ A}$

9.3. $I = 2 \text{ A}$

9.4. $I = 1 \text{ A}$

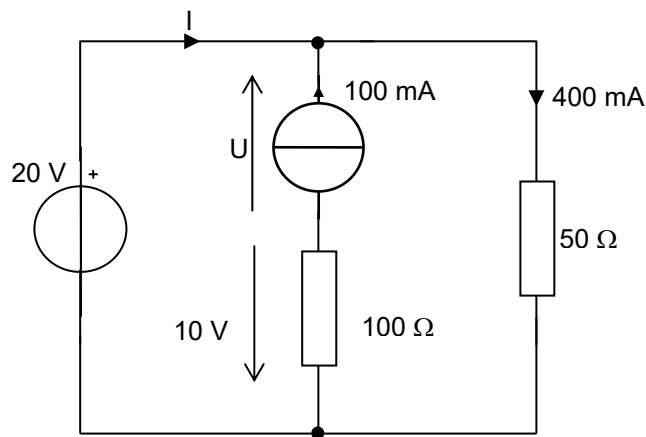
exo 10 : $I = \frac{15-35}{100} = -0,2 \text{ A}$

exo 11 : Le générateur de courant impose une intensité de 10 mA dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La résistance de 50Ω est traversée par ce courant. Elle est donc le siège d'une d.d.p. de 0,5 V.



Par conséquent, $U = 5 + 0,5 = 5,5 \text{ V}$

exo 12 : Le générateur idéal de courant impose l'intensité dans la branche du milieu. Par conséquent, la résistance de 100Ω est le siège d'une d.d.p. de $100 \times 100 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ V}$.



Le générateur de tension de 20 V imposant la d.d.p. aux bornes de la branche du milieu, on a :

$$20 = U - 10 \Rightarrow U = 30 \text{ V}.$$

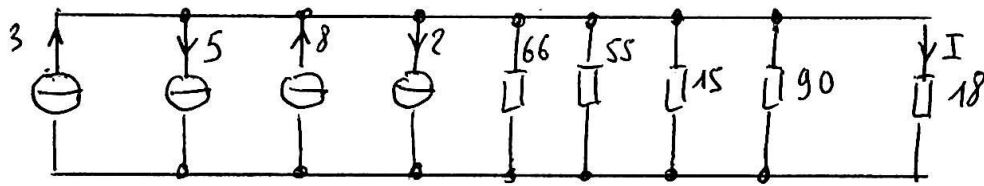
La résistance de 50Ω à droite sur le schéma est soumise à une d.d.p. de 20 V. Elle est donc traversée par une intensité de $I_{50} = \frac{20}{50} = 400 \text{ mA}$.

La loi des nœuds appliquée au nœud situé au-dessus du générateur de courant donne :

$$I + 100 = 400 \Rightarrow I = 300 \text{ mA}$$

EXO 5

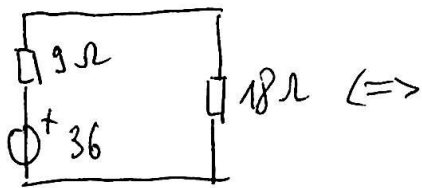
On peut arranger les différents dipôles différemment en regroupant les générateurs de courant d'un côté et les résistances de l'autre :



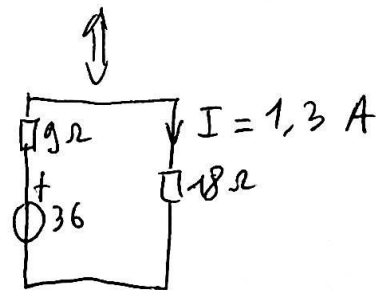
On fusionne générateurs de courant et résistance en // en leur équivalent.
On prend soin de ne pas faire disparaître 18Ω car on cherche l'intensité qui la traverse.



Transformation en dipôle de tension équivalent



$$\Rightarrow I = \frac{36}{18} = 1,3 A$$



EXO 5

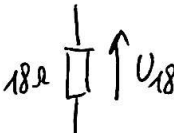
par Millmann, on détermine la ddp aux bornes de 

une fois celle-ci déterminée, nous n'aurons plus qu'à appliquer la loi d'Ohm : $I = \frac{U_{18}}{18}$

$$U_{18} = \frac{3 + \frac{0}{66} - 5 + \frac{0}{55} + 8 + \frac{0}{15} - 2 + \frac{0}{90} + \frac{0}{18}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{66} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{55} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{15} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{90} + \frac{1}{18}} = 24 \text{ V}$$

$$I = \frac{24}{18} = 1,33 \text{ A}$$

Pour appliquer Millman à une branche ne contenant qu'un générateur idéal de courant, on met l'intensité au numérateur en faisant attention à son sens (+ si intensité débitée vers +), par exemple ici on cherche

 toutes les intensités orientées, débitées, vers le +, la flèche, seront comptées positivement.

Au numérateur figure l'inverse de la résistance interne du générateur de courant. Celui-ci étant idéal, cette résistance étant ∞ on a un terme $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$.

ainsi la branche  est comptée : $\frac{+5}{\frac{1}{\infty}} = \frac{5}{0}$

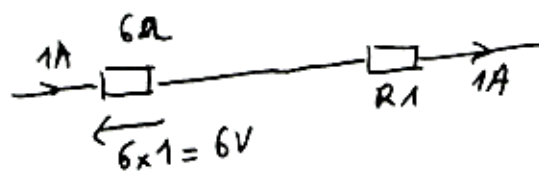
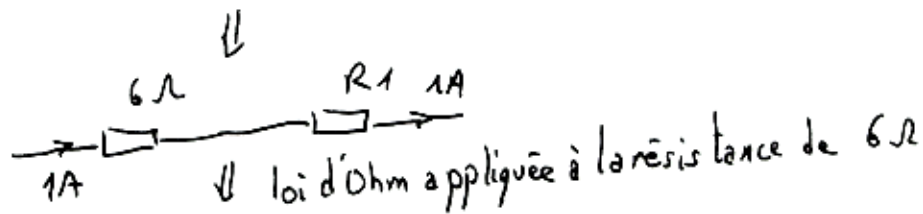
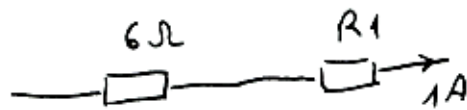
Exercice 4.1.

Principe : pour calculer une résistance, que ce soit en électricité ou en électronique, le principe est toujours le même, il faut appliquer la loi d'Ohm : $R = \frac{V_R}{I_R}$ il faut donc calculer la d.d.p. aux bornes de la résistance V_R et le courant qui la traverse I_R .

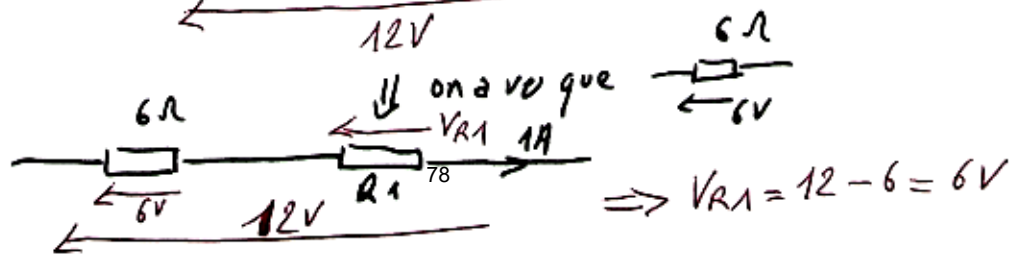
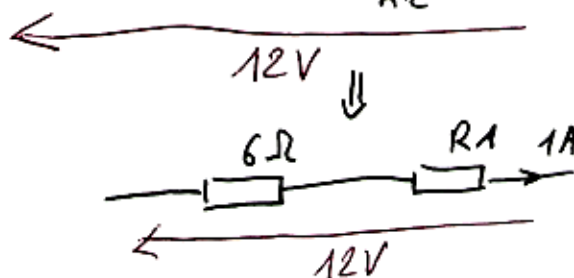
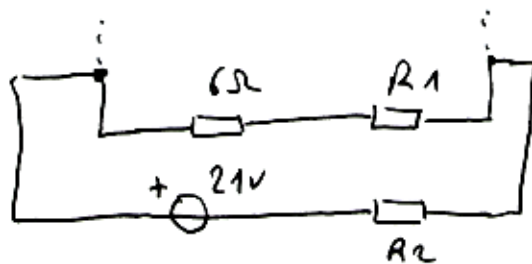
Occupons-nous d'abord de R_1 :

l'énoncé nous donne $I_{R1} = 1A$, il reste à déterminer V_{R1} .

branche contenant R_1 :



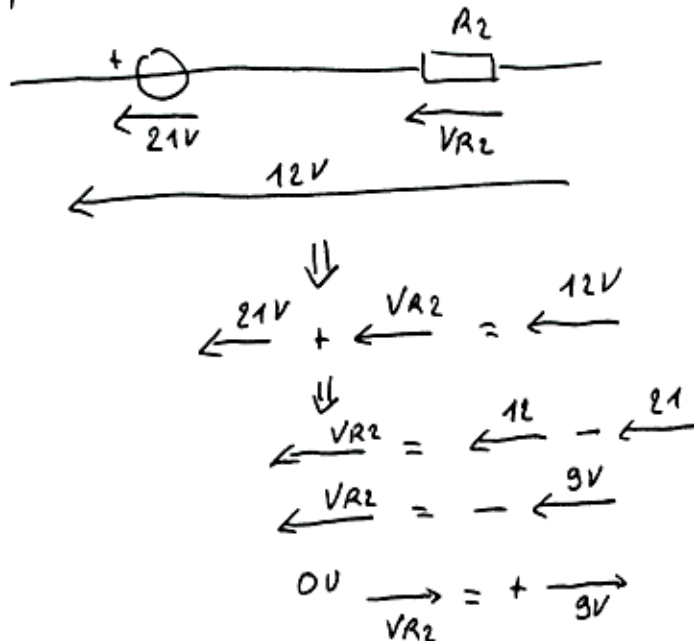
Or, l'énoncé indique qu'aux bornes de cette branche, nous avons une d.d.p. de 12V.



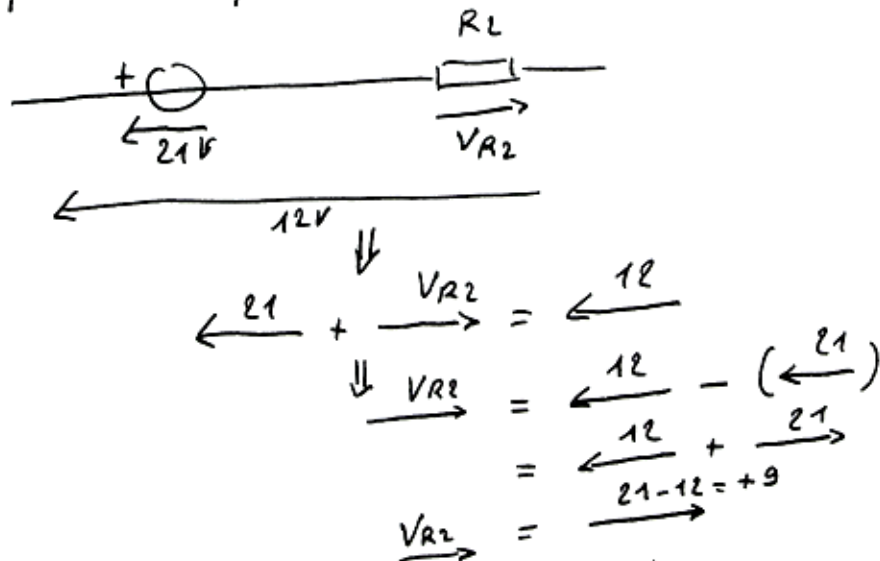
$$\text{donc } R_1 = \frac{V_{R1}}{I_{R1}} = \frac{6}{1} = 6 \Omega$$

Calcul de R_2 :

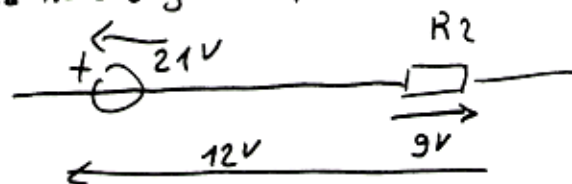
Si on place la ddp aux bornes de R_2 comme cela :



Si on place la ddp aux bornes de R_2 comme ceci :

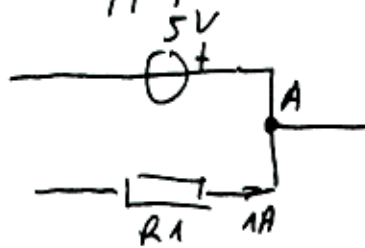


cela ne change rien, on obtient

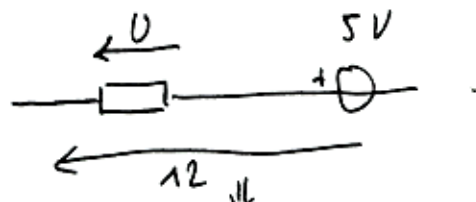
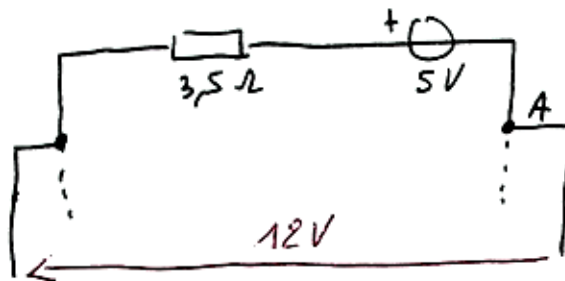


On connaît V_{R2} , calculons I_{R2}

Il faut appliquer la loi des nœuds en A :



branche du haut :



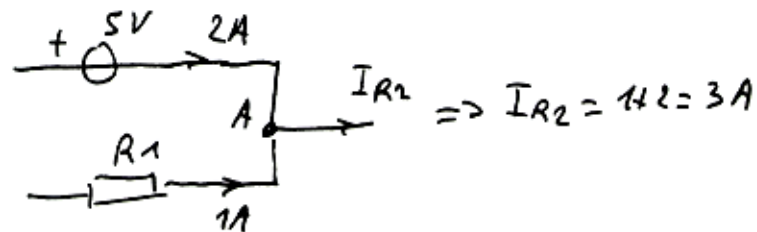
$$\leftarrow U + \leftarrow 5 = \leftarrow 12$$

$$U = \leftarrow 12 - (\leftarrow 5) = \leftarrow 7$$



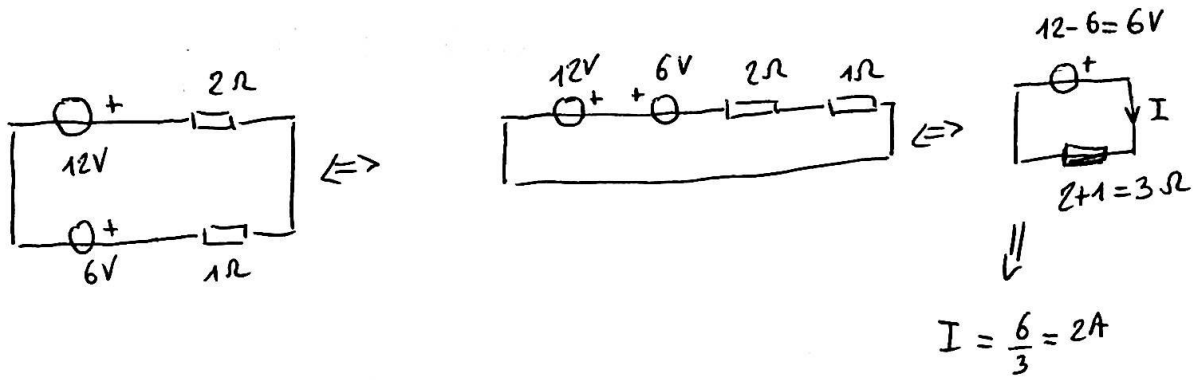
$I_{3,5} = \frac{7}{3,5} = 2A$ c'est l'intensité qui circule dans la branche du haut.

On sait donc maintenant :



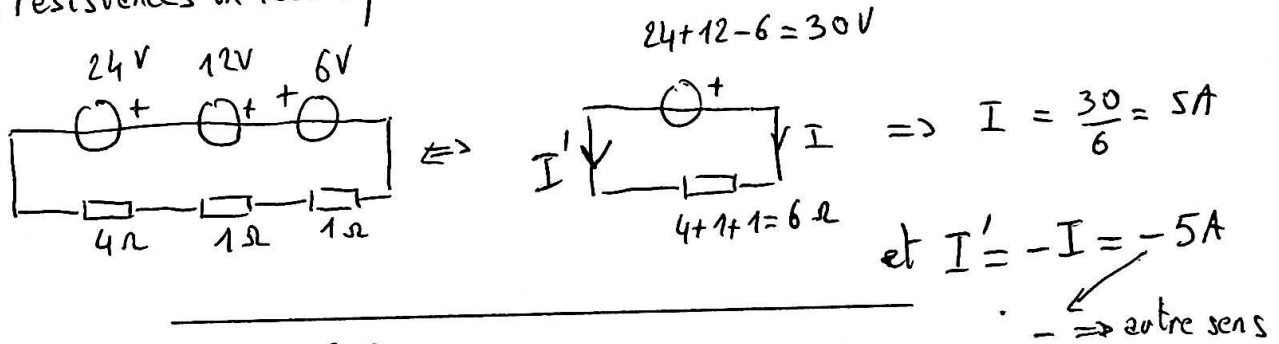
$$\Rightarrow R_2 = \frac{9}{3} = 3\Omega$$

EXO 9.1



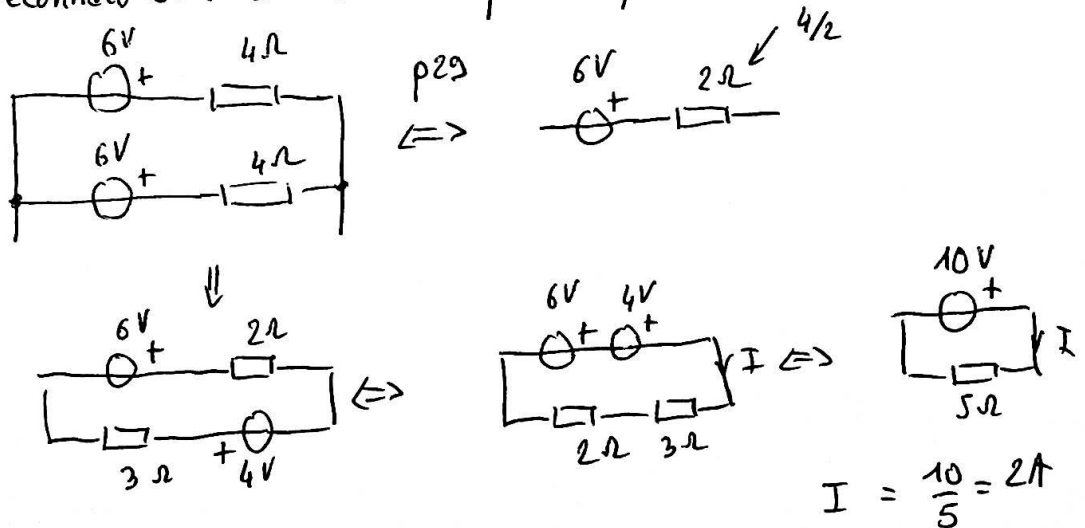
EXO 9.2 p39

Même technique que dans le 9.1 : on regroupe les dipôles de tension et les résistances en leur équivalent. Ils sont tous en série.



EXO 9.3

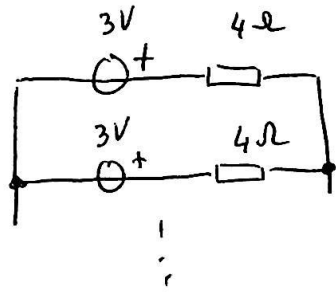
On reconnaît deux branches identiques en parallèle :



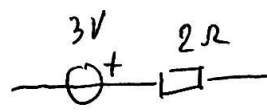
EXO 9.4

branche du haut : $\begin{array}{c} 3V \\ \bigcirc + \end{array} \text{---} 3\Omega \text{---} 1\Omega = \begin{array}{c} 3V \\ \bigcirc + \end{array} \text{---} 4\Omega$

//

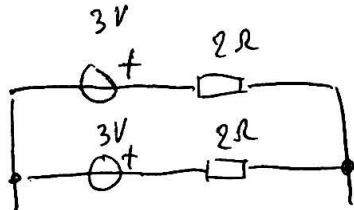


$\Leftrightarrow$ p29

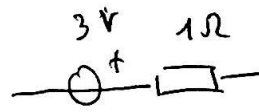


← les 2 branches du haut

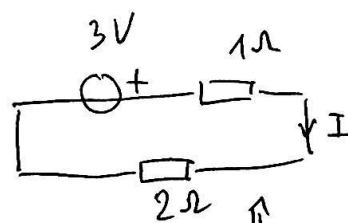
↙ on ajoute la branche n°3



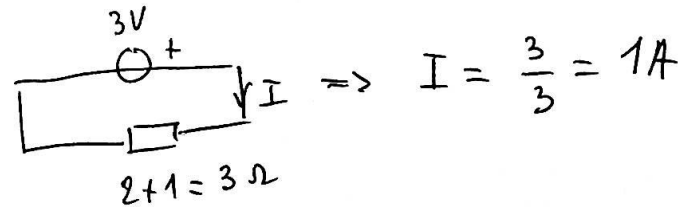
$\Leftrightarrow$ p29



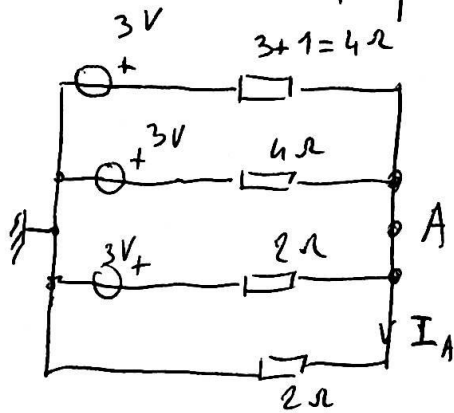
↙ on ajoute la branche tout en bas



$\Updownarrow$



9.4 par Millmen



$$V_A = \frac{+\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{0}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2V$$

$$I_A = \frac{V_A}{2} = \frac{2}{2} = 1A$$

Exercice sur la loi des mailles

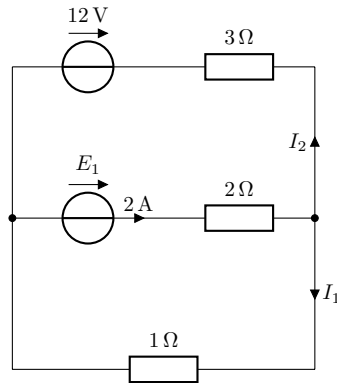


FIGURE 1 – Exercice n°1

Calculer la valeur de E_1 sur le circuit de la figure 1.

Réponse : $E_1 = 8,5\text{ V}$

Exercice sur le théorème de Millman

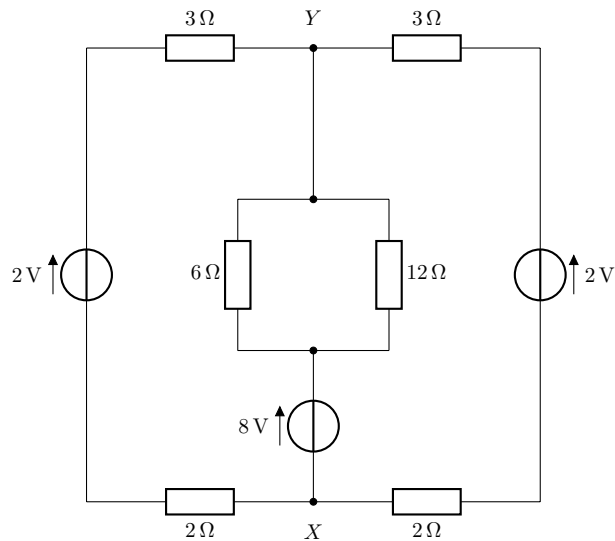


FIGURE 2 – Exercice n°2

Calculer la différence de potentiel entre les nœuds Y et X du circuit de la figure 2.

Réponse : $V_{XY} = 4,3\text{ V}$

Thévenin & Norton

Exemple 1

Dans le schéma de la Figure 15, calculons l'intensité I dans $R = 2\ \Omega$ par la méthode de Thevenin.

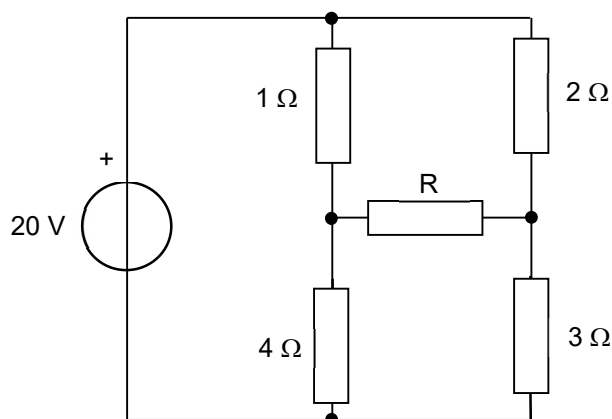


Figure 15

Le but est de remplacer le réseau aux bornes de R par un générateur équivalent de Thevenin.

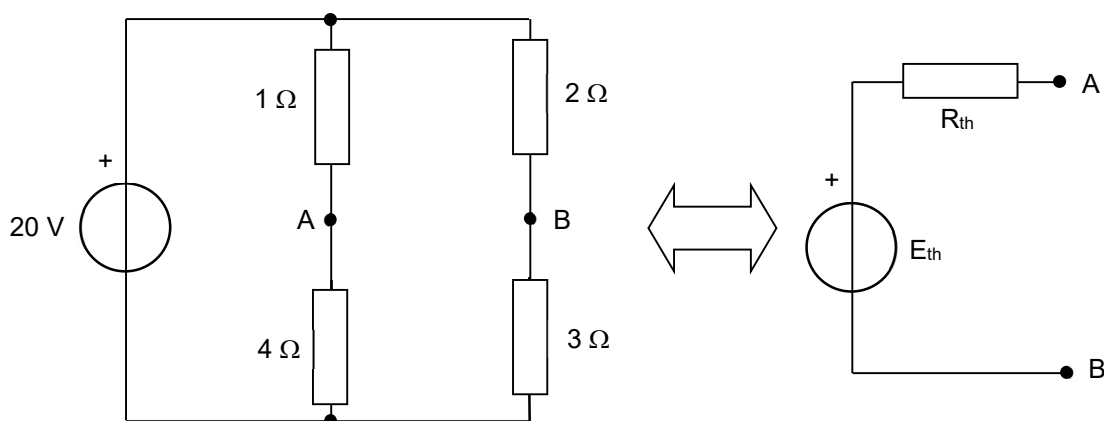


Figure 16

Calculons la résistance R_{th} . Pour cela, il faut éteindre la source de tension de f.é.m. 20 V, c'est-à-dire la remplacer par son impédance interne. Cette dernière est nulle puisqu'il s'agit d'une source de tension idéale. On calcule donc la résistance entre les points A et B sur le schéma de la Figure 17.

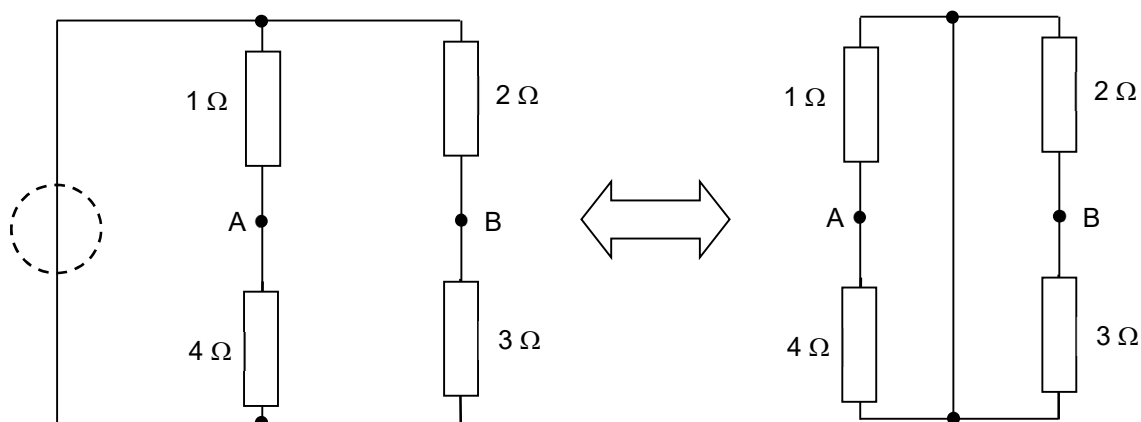
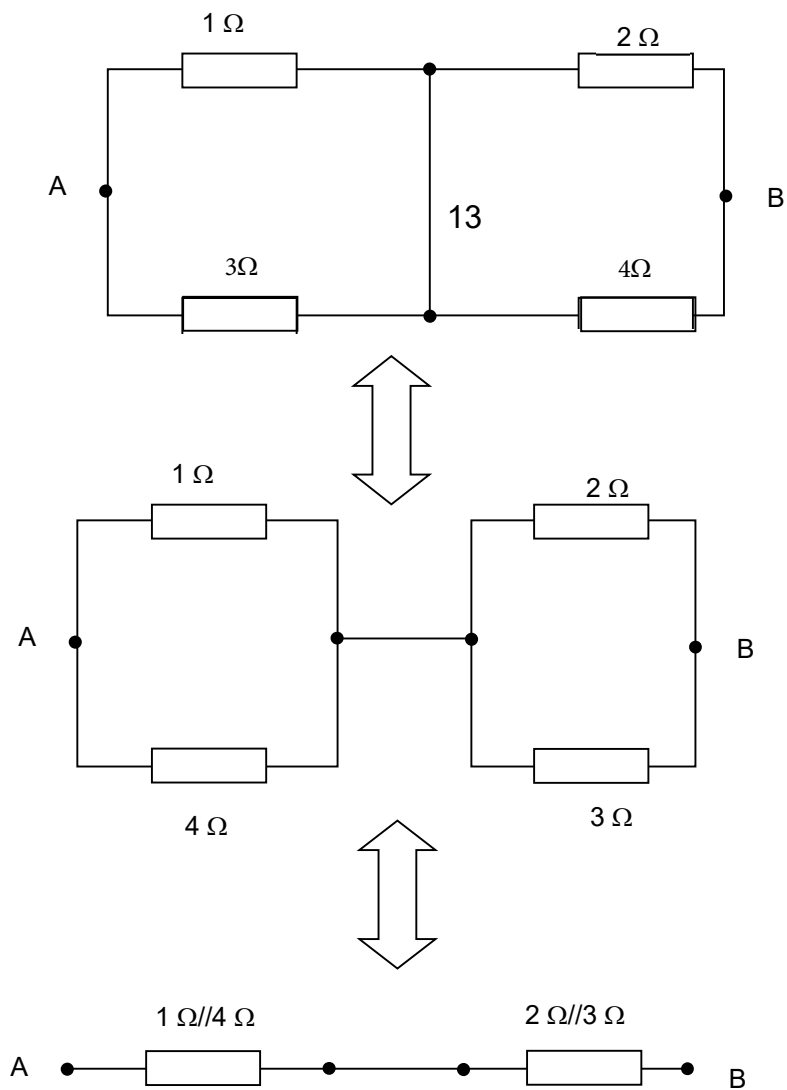


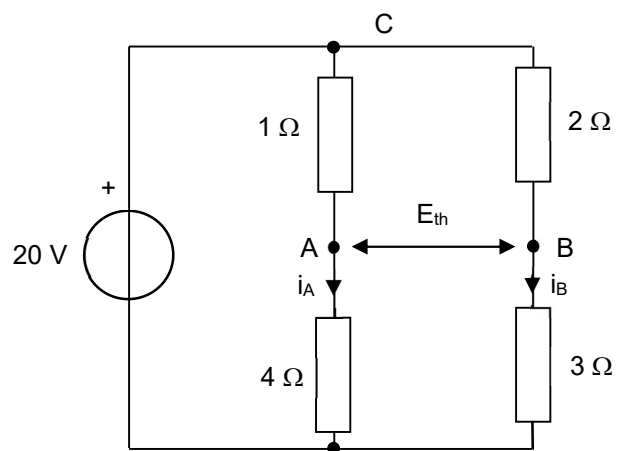
Figure 17



La résistance du générateur équivalent de Thevenin a donc pour valeur :

$$R_{th} = \frac{1 \times 4}{1 + 4} + \frac{2 \times 3}{2 + 3} = 2\ \Omega$$

Calculons E_{th} :



Nous allons calculer les intensités i_A et i_B puis les d.d.p. V_{CA} et V_{CB} . L'équation de la maille CAB permettra d'obtenir $V_{AB} = E_{th}$.

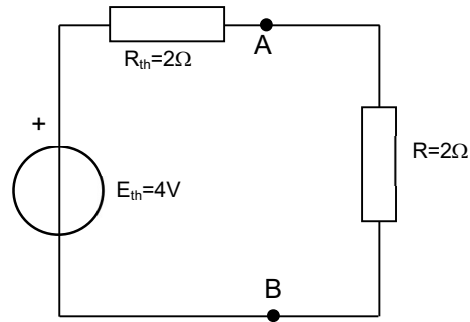
$$i_A = \frac{20}{1+4} = 4 \text{ A} \Rightarrow V_{CA} = 1 \times 4 = 4 \text{ V}$$

$$i_B = \frac{20}{2+3} = 4 \text{ A} \Rightarrow V_{CB} = 2 \times 4 = 8 \text{ V}$$

$$V_{CA} + V_{AB} + V_{BC} = 0 \Rightarrow V_{AB} = -(V_{BC} + V_{CA}) = -(-8 + 4) = 4 \text{ V}$$

Donc, $E_{th} = 4 \text{ V}$.

On peut donc redessiner le circuit initial en remplaçant le pont de Wheastone par le générateur de Thevenin :

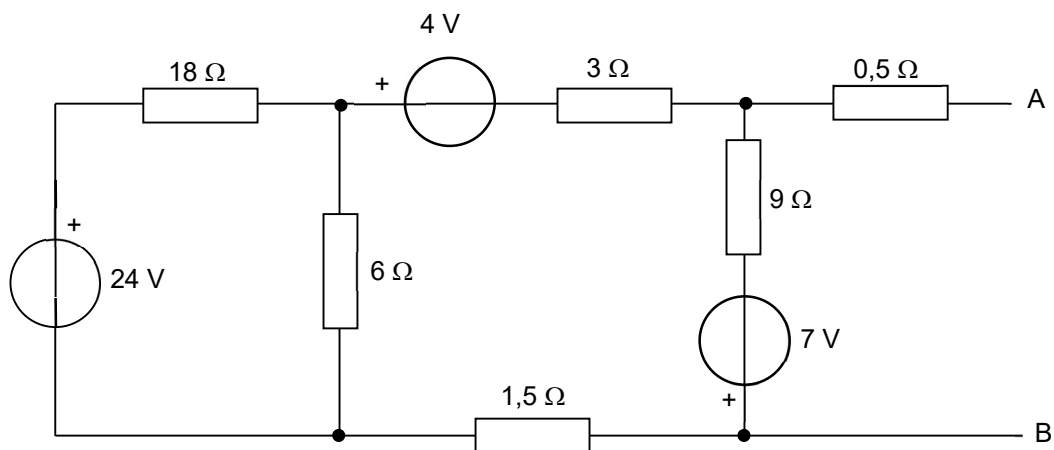


ATTENTION : Le pôle + est tourné vers A car A est positif par rapport à B : $V_{AB} > 0$.

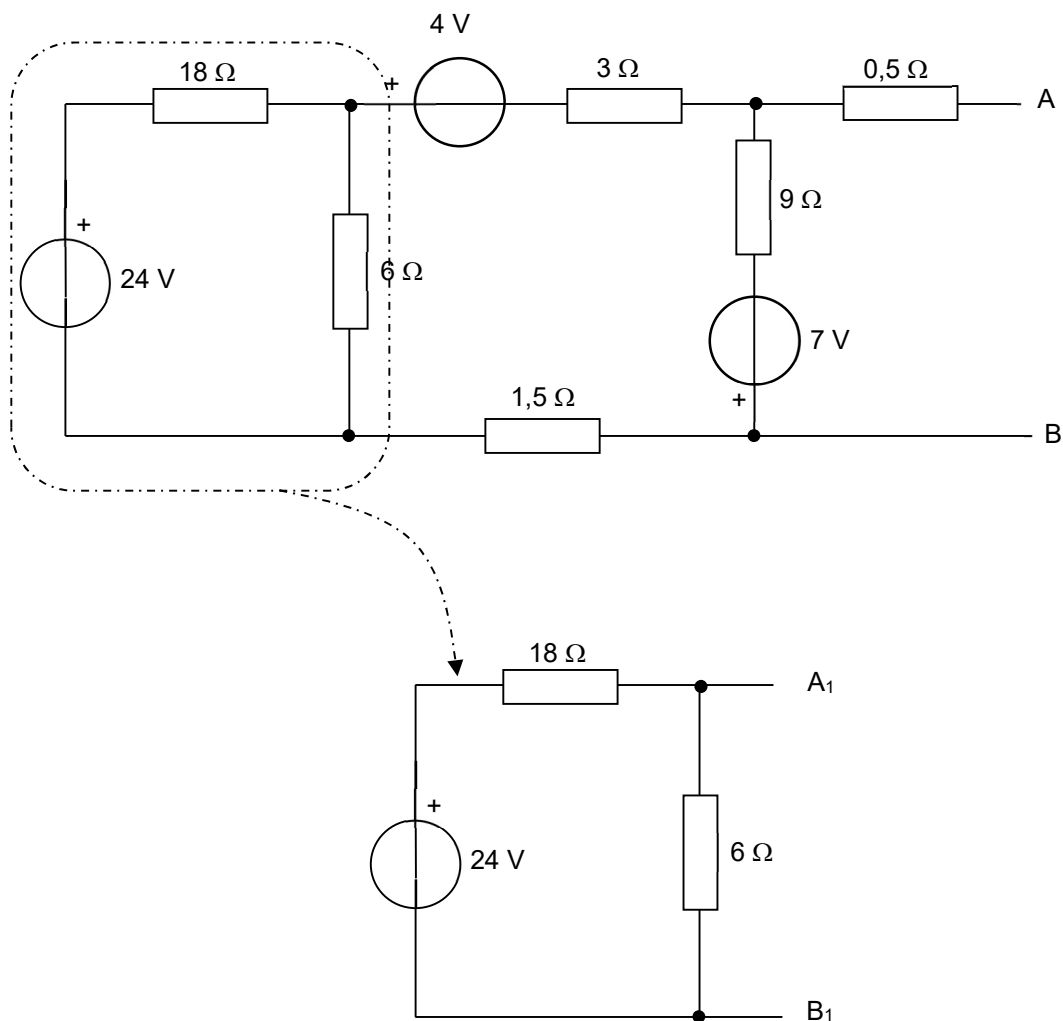
Le calcul de l'intensité qui passe dans la résistance est devenu très simple : $i = \frac{4}{2+2} = 1 \text{ A}$

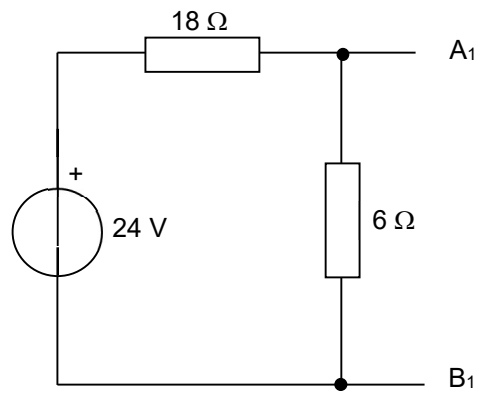
Exemple 2 :

Déterminer le générateur de Thevenin équivalent au schéma ci-dessous vu des bornes A et B :



On recherche la maille la plus éloignée des points A et B, puis on remplace cette maille par un générateur de Thevenin "intermédiaire". On réitère ensuite l'opération, progressant ainsi de proche en proche vers les points A et B.



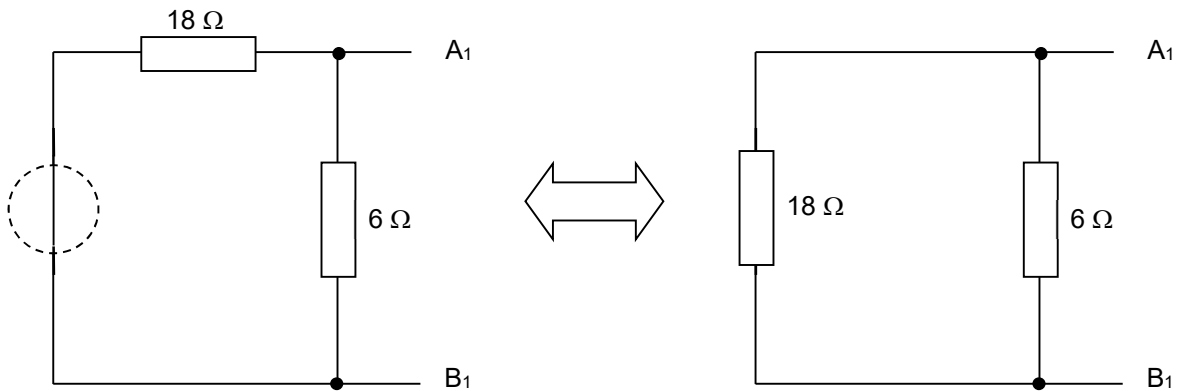


Déterminons le générateur équivalent de Thevenin entre A₁ et B₁ :

La f.é.m. s'obtient avec la formule du diviseur de tension

$$E_{ThA_1B_1} = 24 \cdot \frac{6}{18+6} = \frac{24}{3} = 6 \text{ V}$$

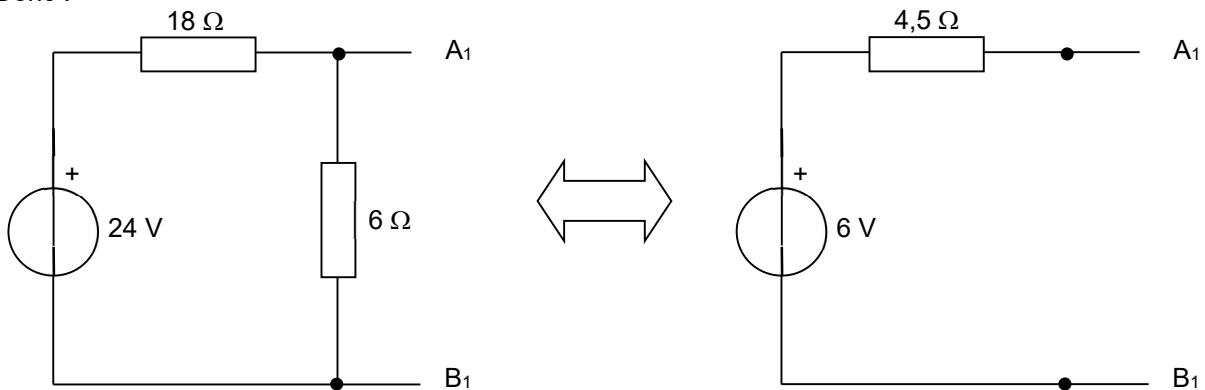
La résistance s'obtient en éteignant la source de tension de f.é.m. 24 V et en calculant la résistance vu des points A₁ et B₁.



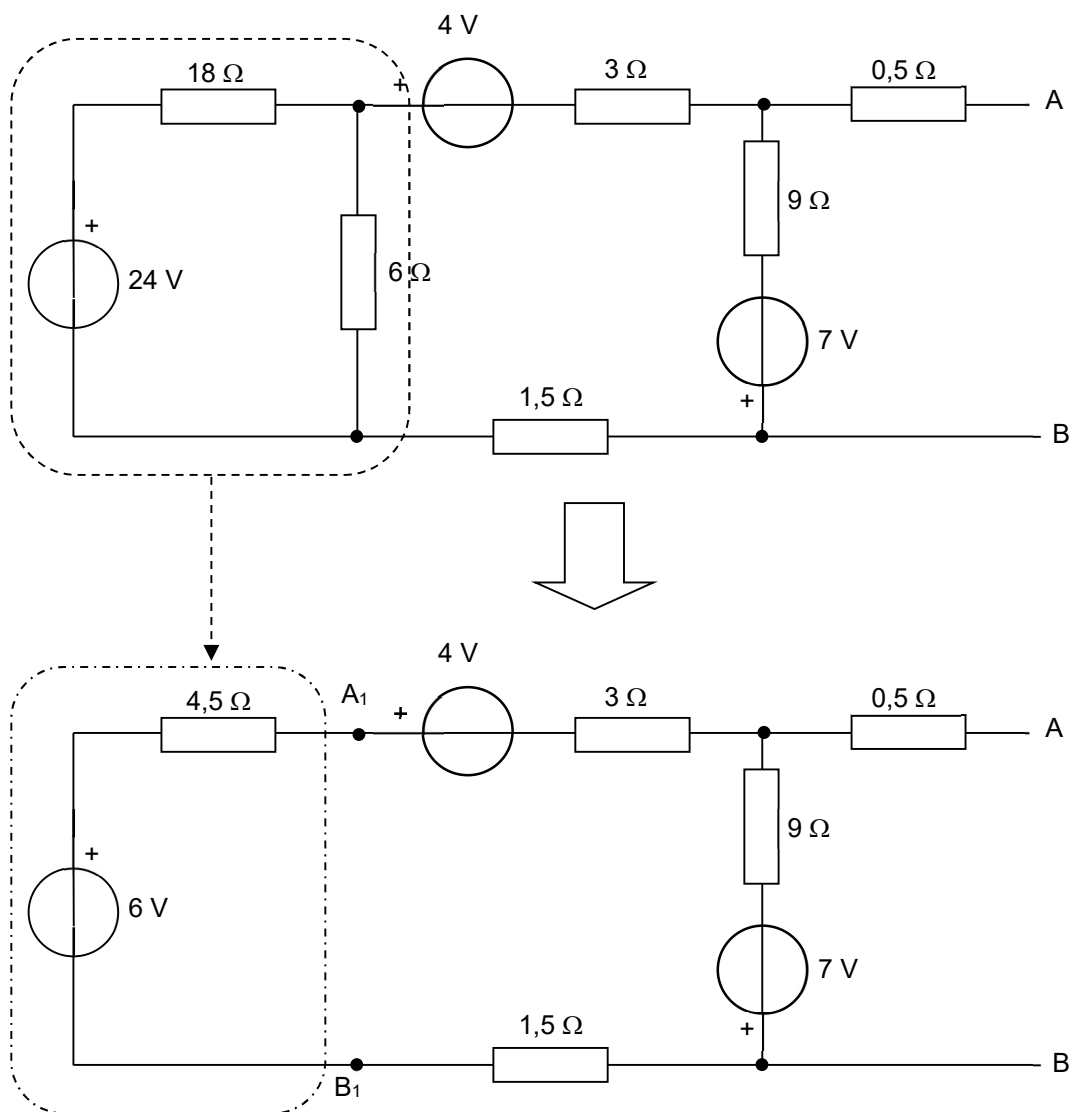
La résistance interne du générateur équivalent de Thevenin n°1 est donc

$$R_{eq} = \frac{6 \times 18}{6 + 18} = 4,5 \Omega$$

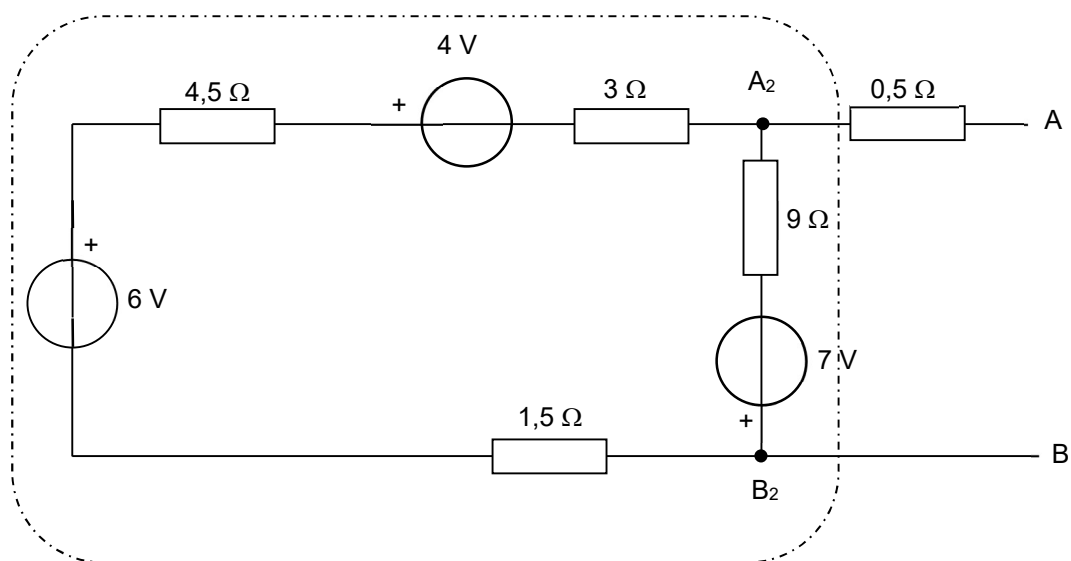
Donc :



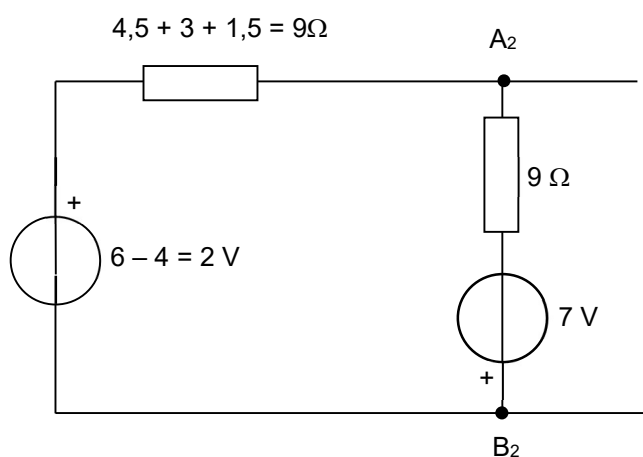
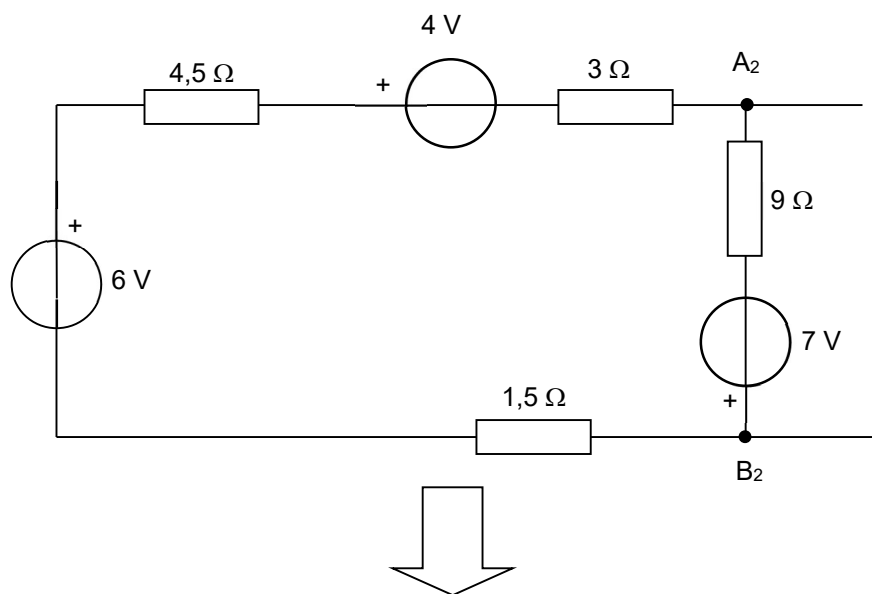
On remplace la maille par le générateur de Thevenin calculé :



On réitère le procédé, c'est-à-dire que l'on cherche à nouveau la maille la plus éloignée des points A et B, puis on remplacera cette maille par un générateur équivalent de Thevenin (indice 2).

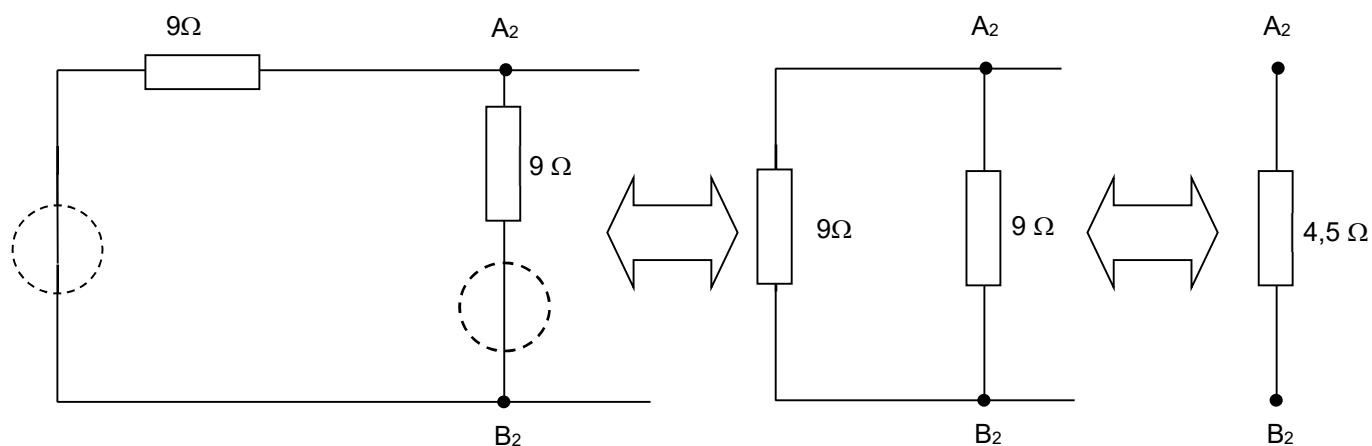


Simplifions la maille trouvée en regroupant dans chacune des deux branches les résistances et les générateurs.

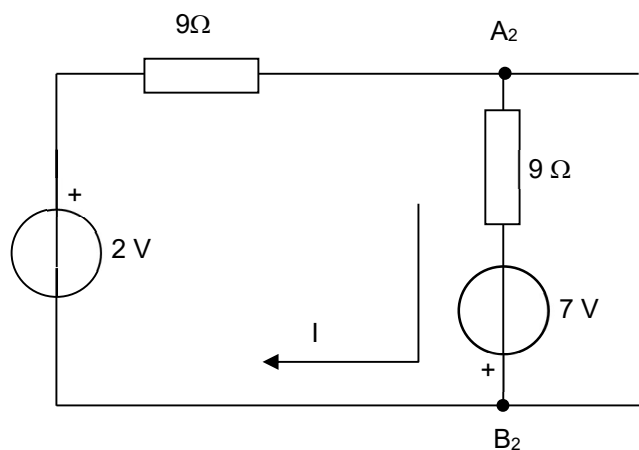


Déterminons la résistance interne du générateur de Thevenin n°2 :

Eteignons les sources de tension :



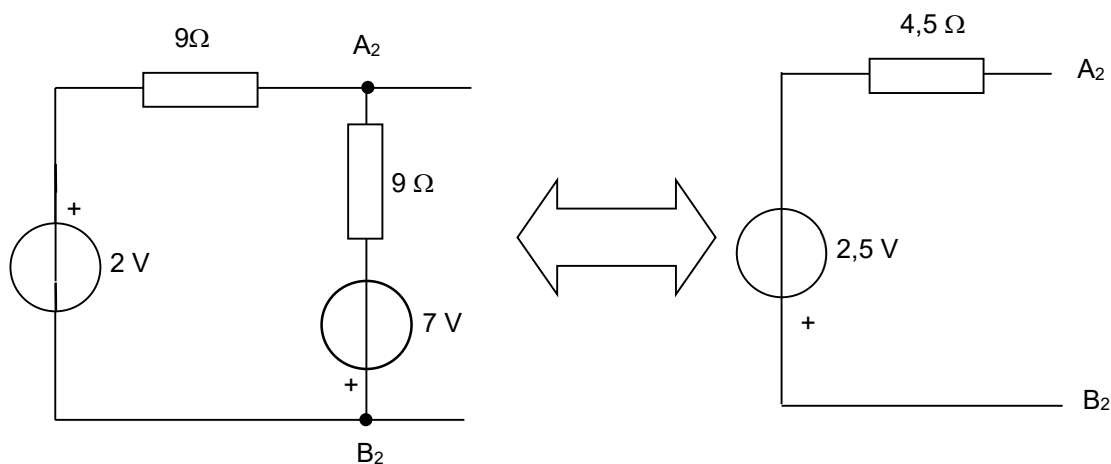
Déterminons la f.é.m. équivalente du générateur de Thevenin n°2 :



L'équation de la maille permet de déterminer I : $I = \frac{7+2}{9+9} = \frac{9}{18} = 0,5 \text{ A}$

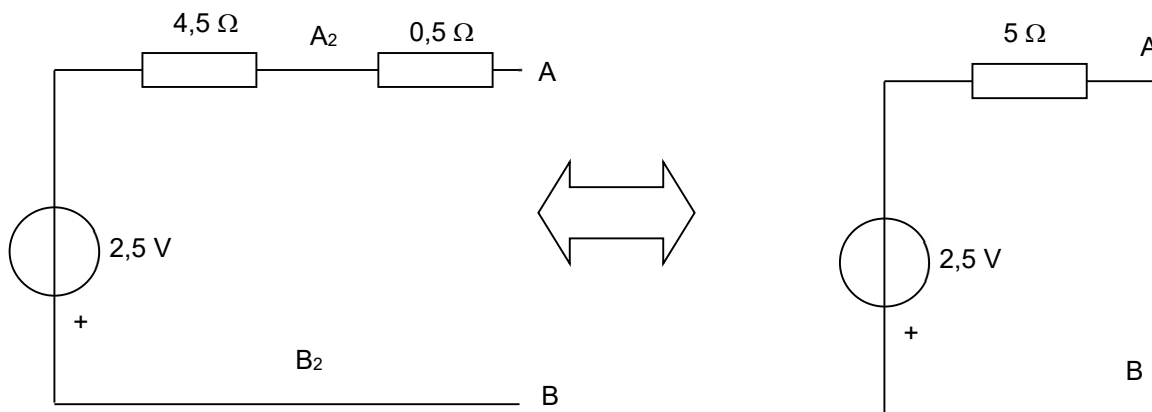
$$E_{ThA_2B_2} = V_{A_2} - V_{B_2} = 9 \times I - 7 = -2,5 \text{ V}$$

Donc :

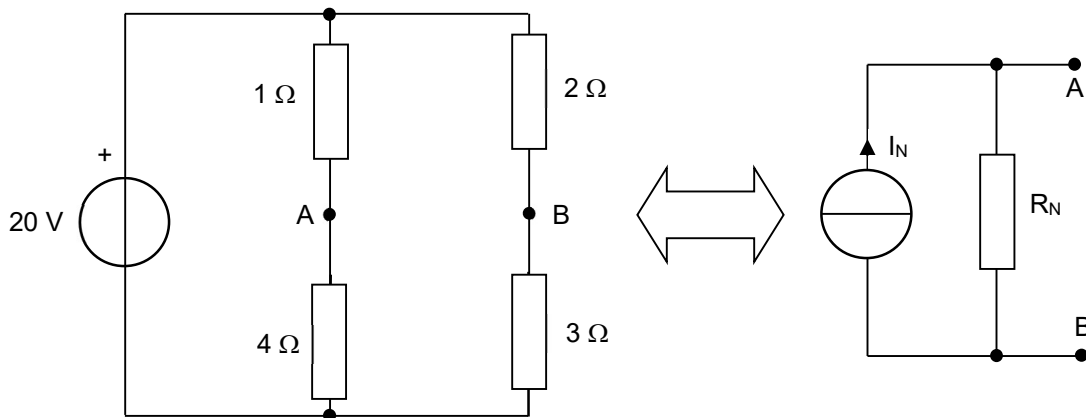


Attention : le signe moins trouvé pour $E_{ThA_2B_2} = V_{A_2} - V_{B_2}$ signifie que le point B_2 est à un potentiel plus élevé que A_2 . Ainsi nous portons le signe plus sur B_2 .

Il reste à connecter la résistance de $0,5 \Omega$, ce qui nous donne finalement :



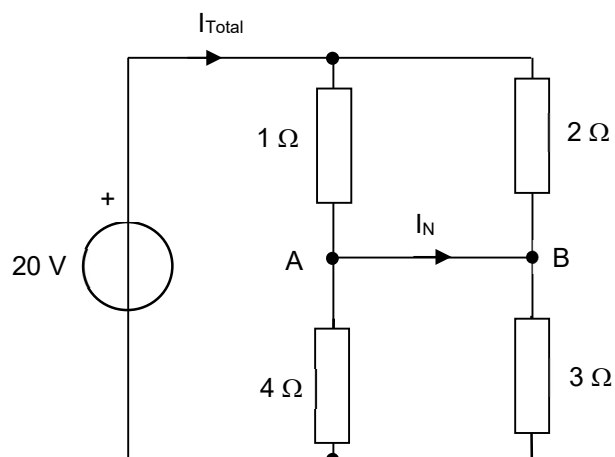
Exemple



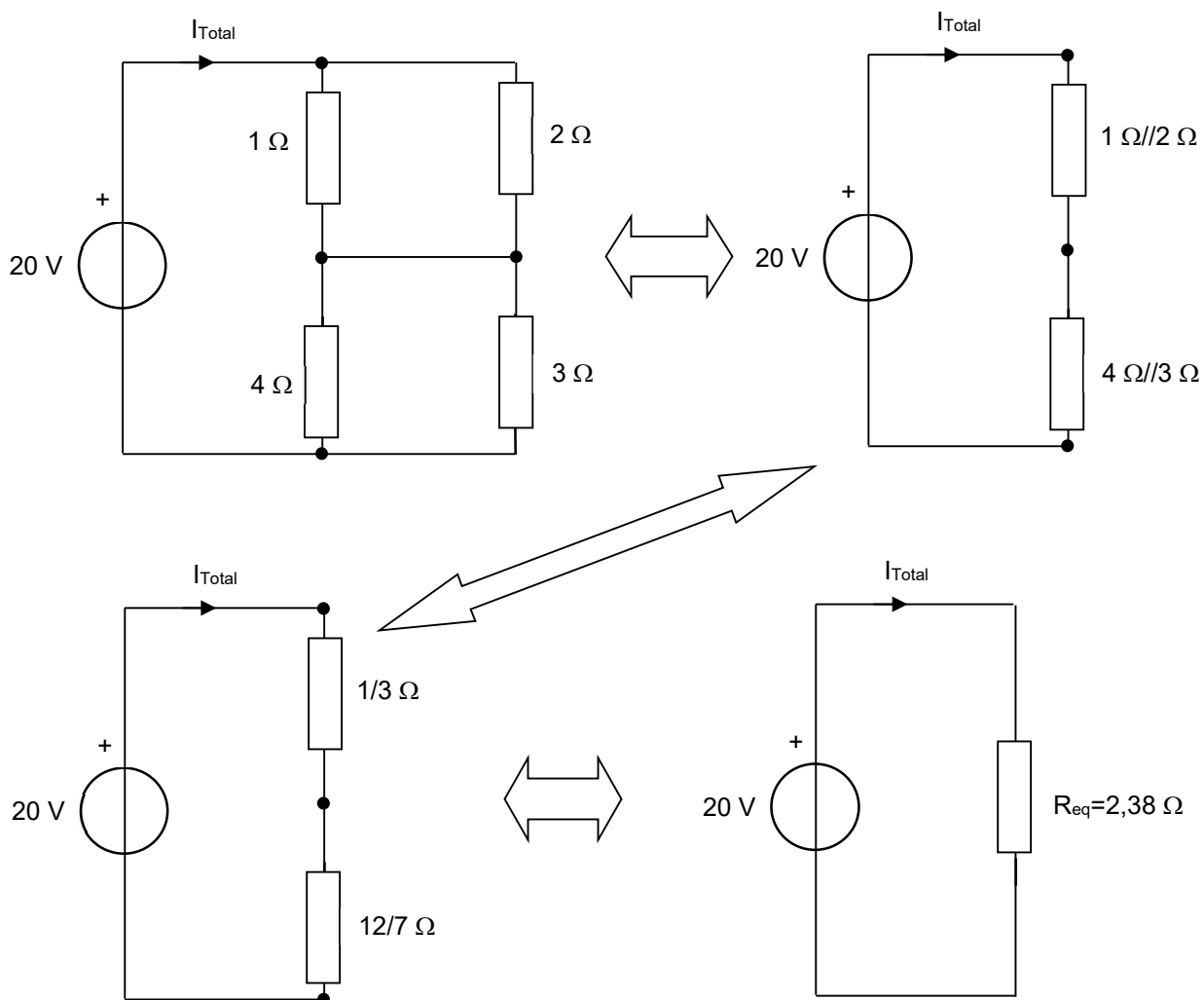
Nous reprenons le même exemple d'application que pour le théorème de Thevenin, à savoir la détermination de l'intensité dans la résistance $R = 2\ \Omega$ sur le schéma de la Figure 15.

La méthode de détermination de la résistance R_N est la même que celle de R_{Th} , on obtient donc : $R_{Th} = R_N = 2\ \Omega$

Détermination de I_N :

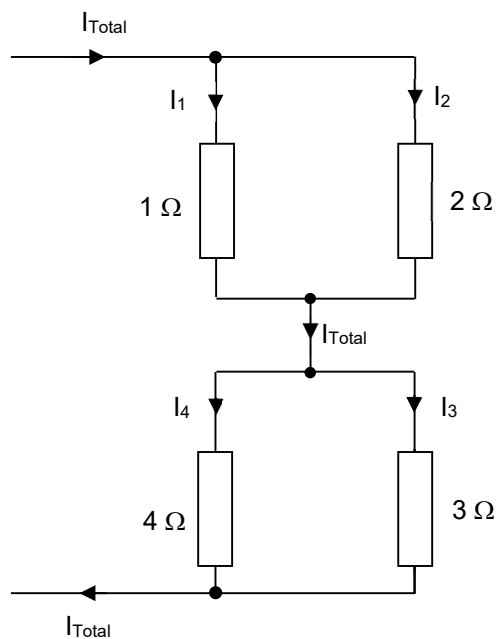


Calculons I_{Total} :



$$R_{eq} = \frac{2}{3} + \frac{12}{7} = \frac{50}{21}; \quad 2,28\ \Omega \Rightarrow I_{Total} = \frac{20}{\frac{50}{21}} = \frac{42}{5}; \quad 8,4\ \text{A}$$

I_{Total} se sépare dans deux diviseurs de courant successifs : $1\ \Omega$ et $2\ \Omega$, puis $3\ \Omega$ et $4\ \Omega$.



Dans 1Ω : on a $I_1 = \frac{42}{5} \times \frac{2}{1+2} = \frac{84}{15} \text{ A}$

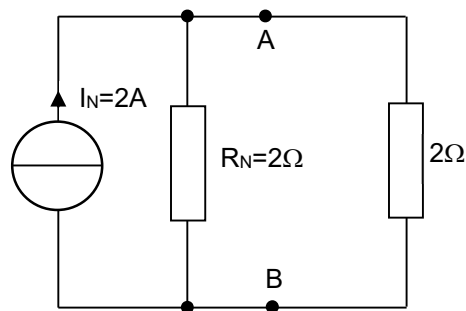
Dans 2Ω : on a $I_2 = \frac{42}{5} \times \frac{1}{1+2} = \frac{42}{15} \text{ A}$

Dans 3Ω : on a $I_3 = \frac{42}{5} \times \frac{4}{3+4} = \frac{168}{35} \text{ A}$

Dans 4Ω : on a $I_4 = \frac{42}{5} \times \frac{3}{3+4} = \frac{126}{35} \text{ A}$

D'où $I_N = I_3 - I_2 = \frac{168}{35} - \frac{42}{15} = 2 \text{ A} (= I_1 - I_4)$

On aboutit au schéma simplifié comprenant le générateur équivalent de Norton :



R_N et la résistance de 2Ω constituent un diviseur de courant pour I_N . Etant donné qu'elles ont même valeur, I_N sera divisé par deux. Par conséquent, l'intensité qui passe dans la résistance de 2Ω est de 1A .

En utilisant le principe de superposition, déterminer I dans le circuit de la Figure 8 :

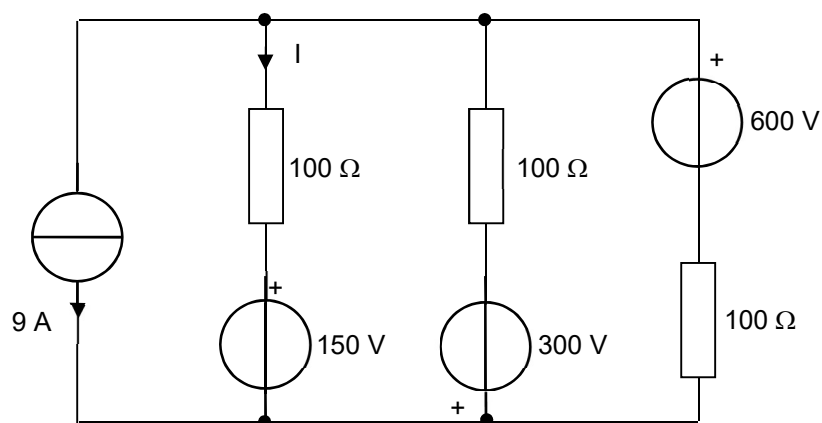


Figure 8

Nous allons redessiner le réseau en autant de dessin qu'il y a de sources. Sur chaque schéma, nous laisserons une seule source active et nous éteindrons les autres. Nous calculerons l'intensité I_k correspondant à chaque schéma et nous les sommerons ensuite.

Etape n°1 :

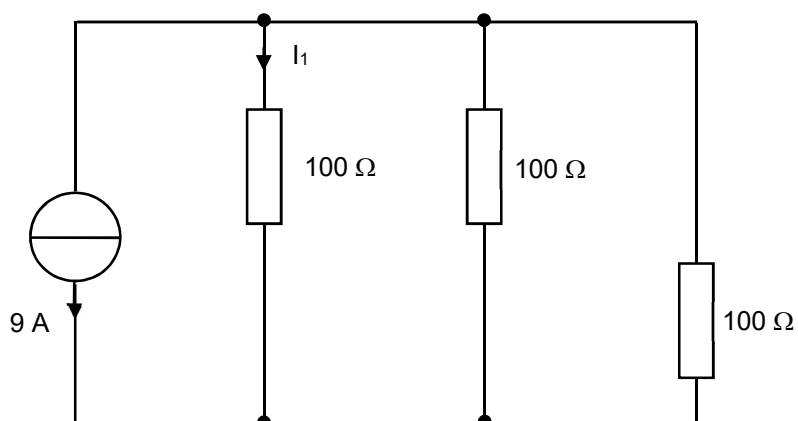


Figure 9

L'intensité débitée par le générateur idéal de courant se sépare en trois parties égales étant donné que les trois résistances ont même valeur. Dans chacune des résistances l'intensité circule du bas vers le haut. On a ainsi $I_1 = -9/3 = -3$ A.

Etape n°2 :

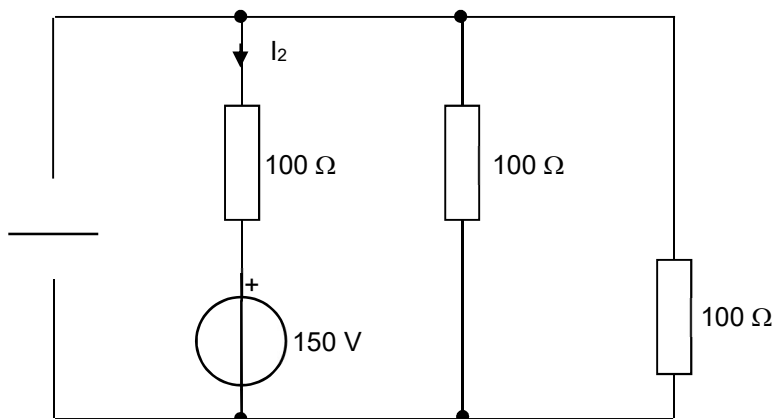


Figure 10

Le schéma de la Figure 10 se simplifie en remplaçant les deux résistances de droite par leur résistance équivalente et en supprimant la branche de gauche (celle du générateur de courant éteint).
On obtient ainsi la Figure 11 :

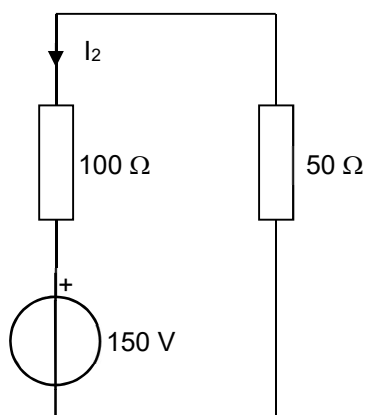


Figure 11

Ici aussi le sens de l'intensité est opposé à I_2 , nous aurons donc une intensité négative.

$$I_2 = - 150/(100+50) = - 1 \text{ A}$$

Etape n°3 :

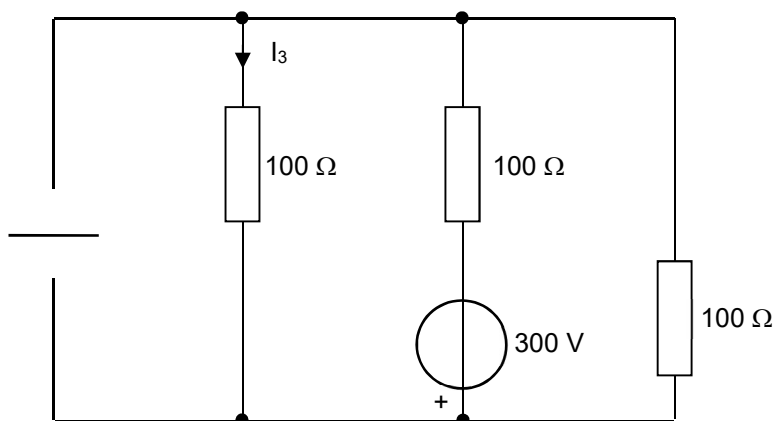


Figure 12

Nous ne simplifierons pas le schéma comme à l'étape n°2, en effet, si nous fusionnions les deux résistances de $100\ \Omega$ en une résistance équivalente, nous ne pourrions plus calculer I_3 qui circule dans la résistance de $100\ \Omega$ de gauche. Nous n'effectuerons cette opération que pour calculer l'intensité débitée par la source de tension de 300 V . Cette source débite dans la résistance de $100\ \Omega$ en série avec elle et dans les deux résistances de $100\ \Omega$ en parallèle, équivalentes à une résistance de $50\ \Omega$. La source débite une intensité de $300/(100+50) = 2\text{ A}$. Cette intensité se divise en deux parties égales circulant du bas vers le haut, en sens inverse par rapport au sens de I_3 .

Nous avons ainsi $I_3 = -1\text{ A}$.

Etape n°4 :

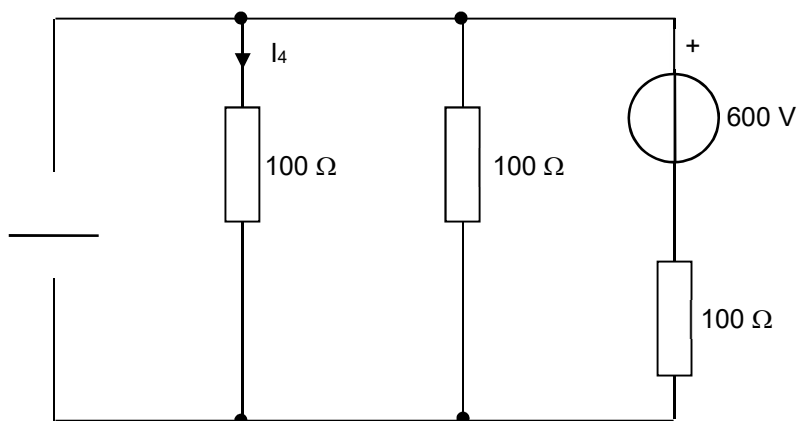


Figure 13

La source de tension débite une intensité de $600/(100+50) = 4\text{ A}$. Cette intensité se divise en deux parties égales dans chacune des deux résistances de $100\ \Omega$ et circule du haut vers le bas. Ainsi, $I_4 = 2\text{ A}$.

L'intensité I cherchée est la somme algébrique des intensités obtenues à chaque étape :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -3 - 1 - 1 + 2 = -3\text{ A}.$$

Supposons que nous ayons dessiné la Figure 13, la Figure 12, la Figure 10 et la Figure 9 sur du papier calque, si nous superposons ces 4 schémas, nous retrouvons la Figure 8.

Principe de superposition des états électriques

Application aux tensions

Déterminons la tension V de la figure 1 grâce au principe de superposition des états électriques.

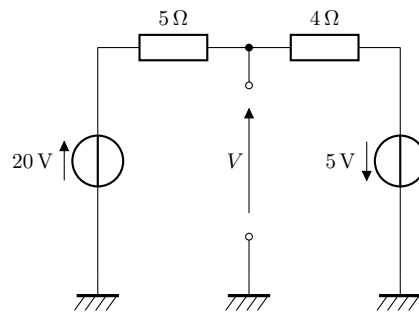


FIGURE 1 – Illustration du principe de superposition appliqué aux tensions

Le schéma de la figure 1 possède deux dipôles, il nous faut représenter deux sous-circuits comprenant chacun un seul dipôle, l'autre étant « éteint ».

Pour chacun de ces deux sous-circuits il faut calculer les tensions V_1 et V_2 . En vertu du principe de superposition, nous aurons : $V = V_1 + V_2$.

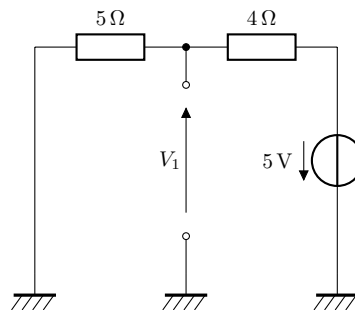


FIGURE 2 – Sous-circuit n° 1

On calcule les tensions V_1 et V_2 à l'aide de la formule du diviseur de tension.

Pour le sous-circuit n° 1 de la figure 2, nous avons :

$$V_1 = \frac{5}{4 + 5} \cdot (-5) = -2,78 \text{ V}$$

Pour le sous-circuit n° 2 de la figure 3 page suivante, nous avons :

$$V_2 = \frac{4}{4 + 5} \cdot 20 = 8,89 \text{ V}$$

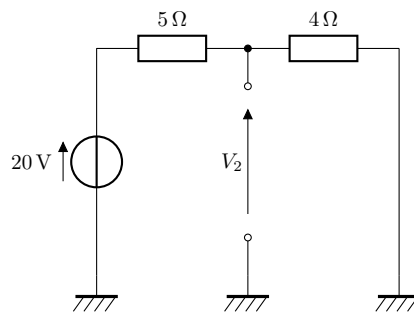


FIGURE 3 – Sous-circuit n° 2

Comme le montre la figure 4, l'addition, la superposition, des valeurs obtenues donne :

$$V = V_1 + V_2 = -2,78 + 8,89 = 6,11 \text{ V}$$

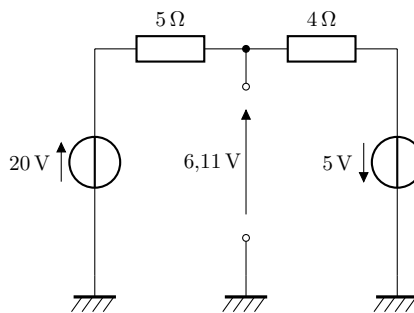
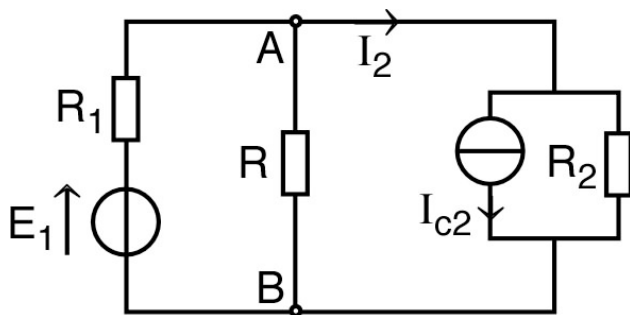


FIGURE 4 – Illustration du principe de superposition appliqué aux tensions

Principe de superposition (théorème d'Helmholtz)

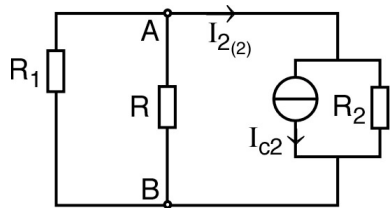
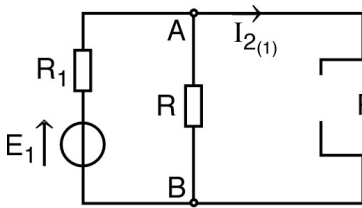
Calculer le courant I_2 , puis de la tension U_{AB} , dans le montage ci-dessous :



Correction :

Le courant causé par le générateur E_1 est : $I_{2(1)} = \frac{RE_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)R}$

le courant causé par le générateur I_{c2} est : $I_{2(2)} = \frac{(R + R_1)R_2I_{c2}}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)R}$



Le courant total cherché est donc : $I_2 = I_{2(1)} + I_{2(2)} = \frac{RE_1 + (R + R_1)R_2I_{c2}}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)R}$

Le principe de superposition s'applique aussi pour les tensions :

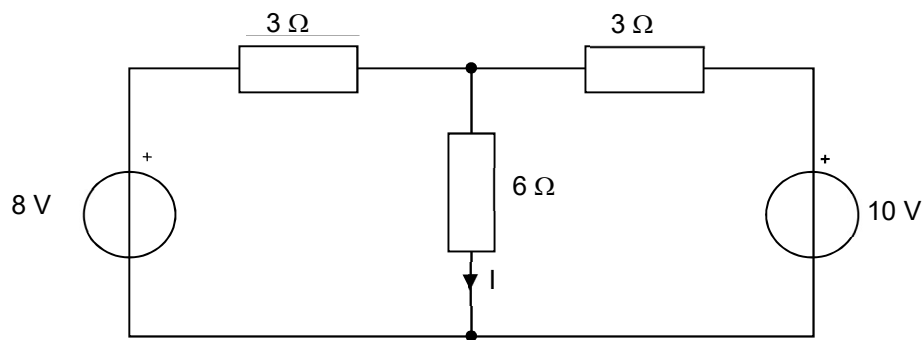
$$U_{AB(1)} = R_2 I_{2(1)} = \frac{RR_2 E_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)R}$$

$$U_{AB(2)} = R_2 \cdot (I_{2(2)} - I_{c2}) = - \frac{RR_1 R_2 I_{c2}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)R}$$

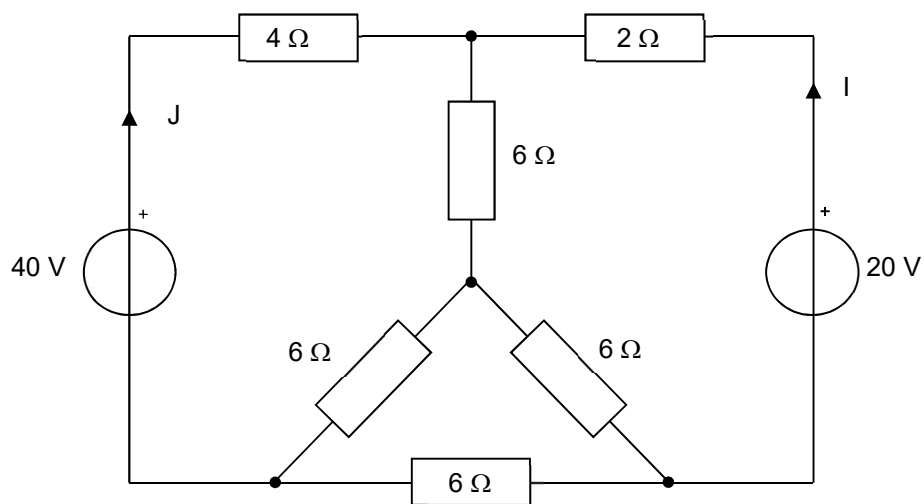
donc au total : $U_{AB} = U_{AB(1)} + U_{AB(2)} = RR_2 \frac{E_1 - R_1 I_{c2}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)R}$

Exercices :

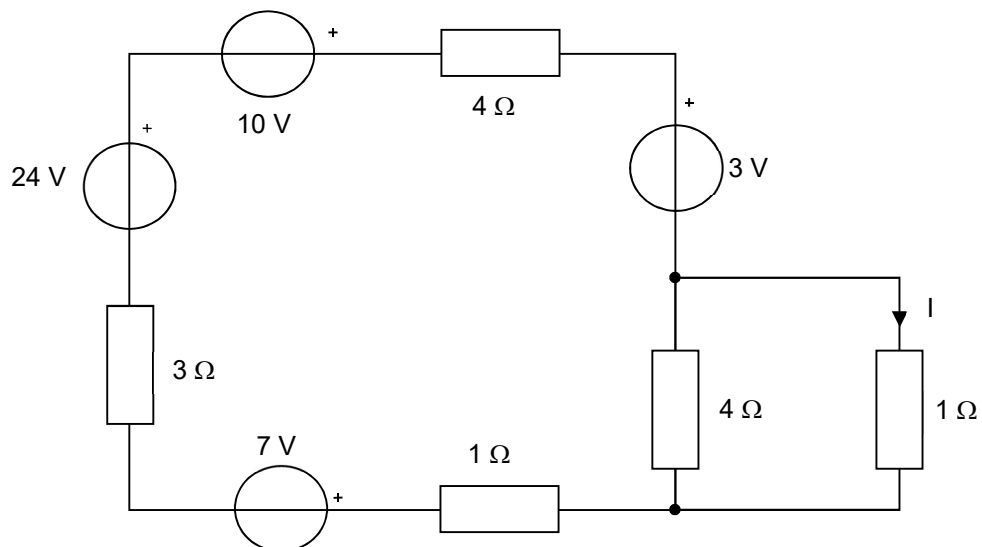
1. Déterminer I par l'emploi du principe de superposition, par l'usage des théorèmes de Thevenin et de Norton.



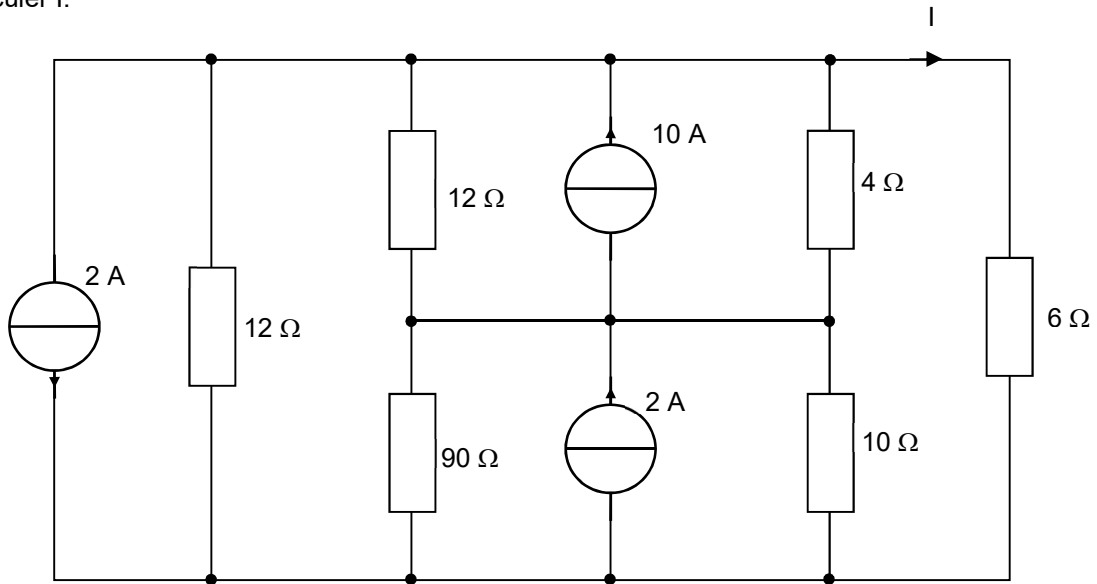
2. Déterminer I et J par la méthode de Thevenin et de Norton.



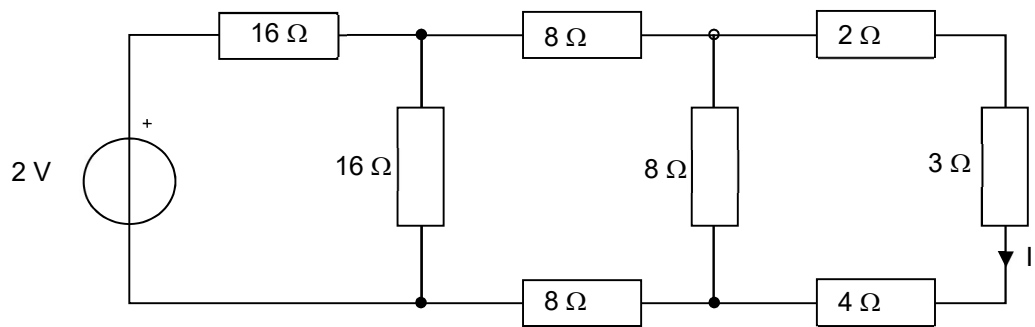
3. Calculez I .



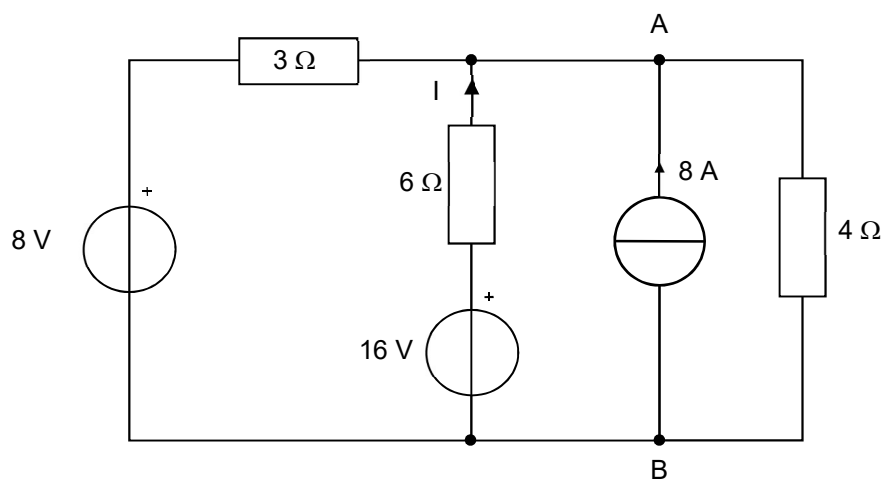
4. Calculer I .



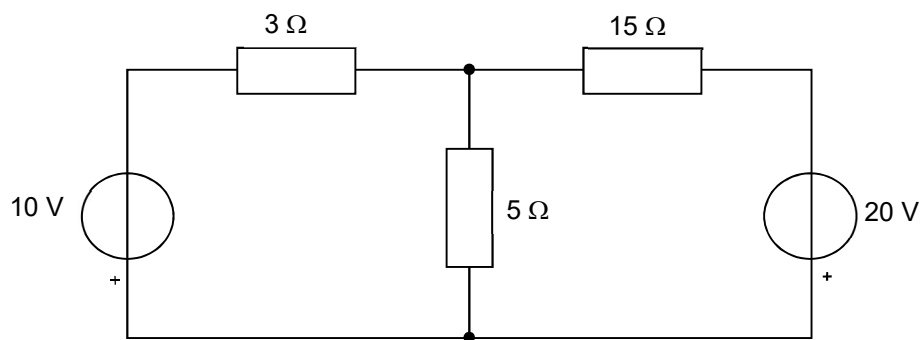
5. Calculer I par le théorème de Thevenin ou de Norton. En déduire le courant dans chaque branche.



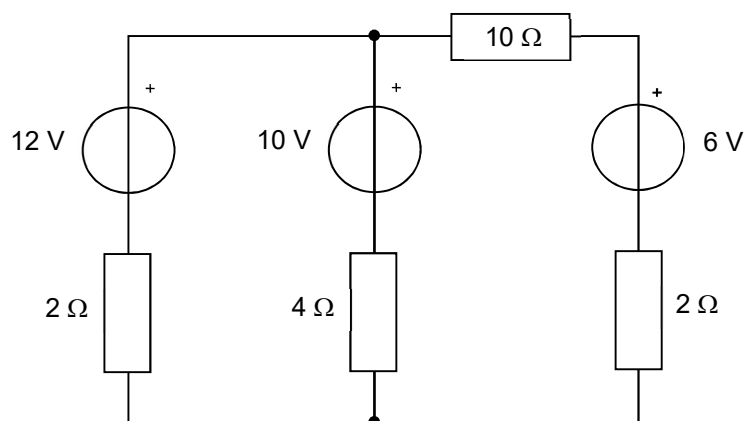
6. Calculer I par le principe de superposition, puis simplifier le schéma à gauche des points A et B.



7. Par la méthode de votre choix, calculer les courants dans chacune des trois branches.

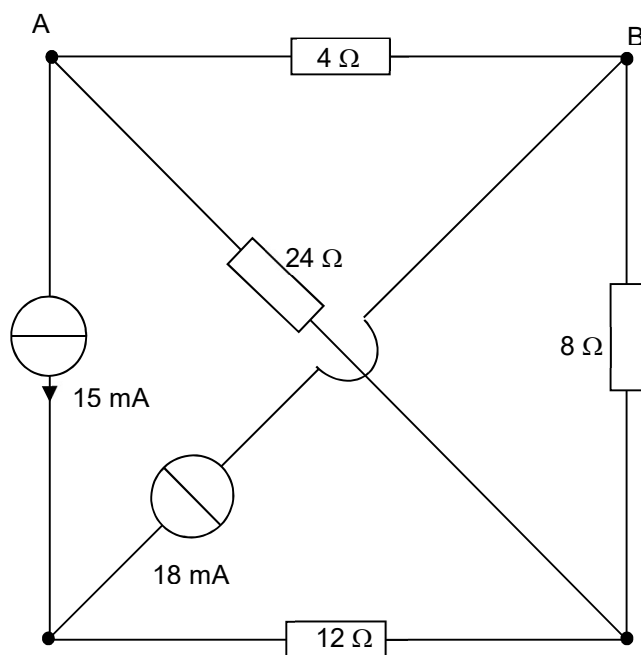


8. Calculer les courants dans chacune des trois branches.



9. Calculez la différence de potentiel V_{AB} , dans le schéma ci-dessous.

piste de réflexion : on peut envisager d'utiliser le théorème de Kennelly, le principe de superposition des états électriques et, bien sûr, le théorème de Thévenin.



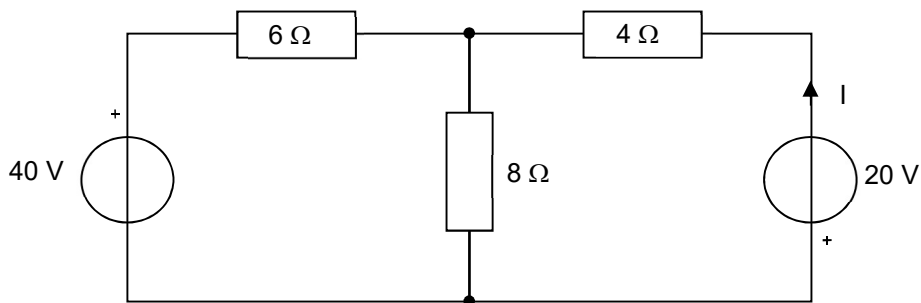
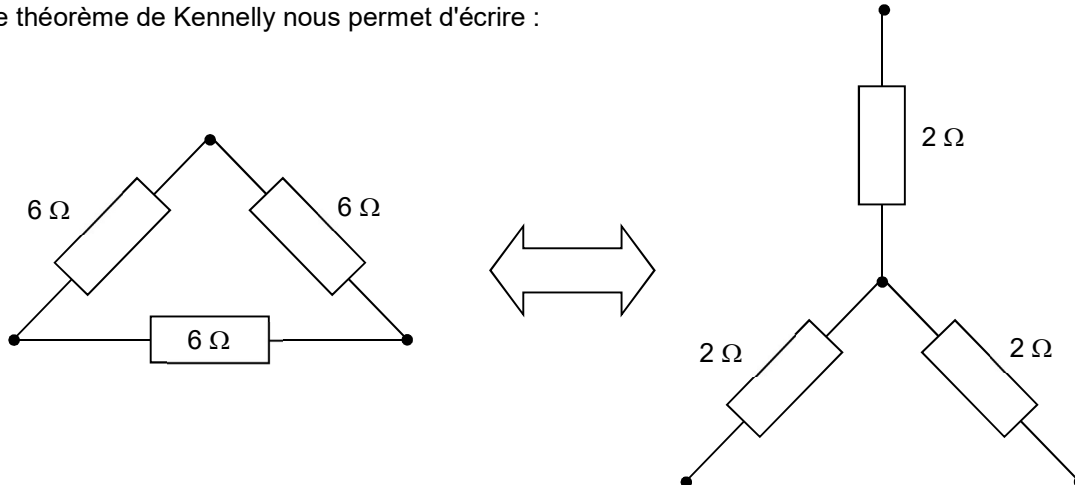
Solutions

$$1. \begin{cases} 8 - 3I - 6(I + J) = 0 \\ 10 - 3J - 6(I + J) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9I + 6J = 8 \\ 6I + 9J = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 \quad \Delta I = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 12 \quad \Delta J = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 42$$

$$I = \frac{12}{45} = \frac{4}{15} \text{ A}, \quad J = \frac{42}{45} = \frac{14}{15} \text{ A}, \quad I + J = \frac{4+14}{15} = \frac{18}{15} = 1,2 \text{ A}$$

2. Le théorème de Kennelly nous permet d'écrire :

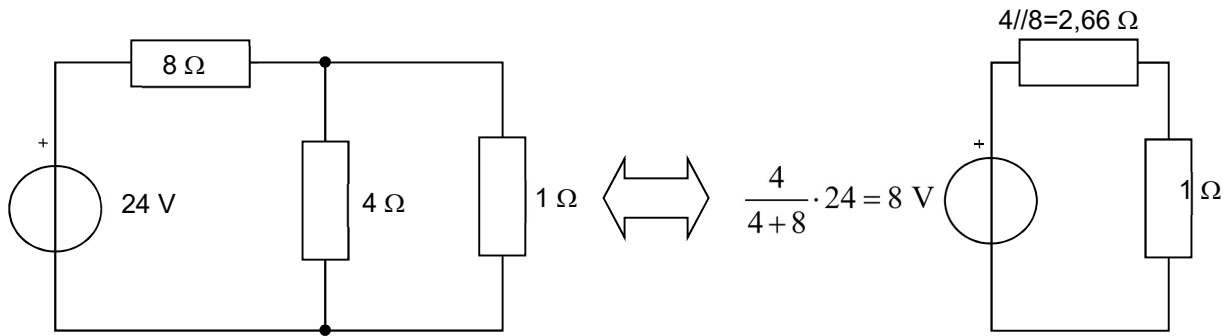


$$\begin{cases} 40 - 6J - 8(I + J) = 0 \\ 20 - 4I - 8(I + J) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8I + 14J = 40 \\ 12I + 8J = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4I + 7J = 20 \\ 3I + 2J = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad \Delta I = \begin{vmatrix} 20 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta J = \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -40$$

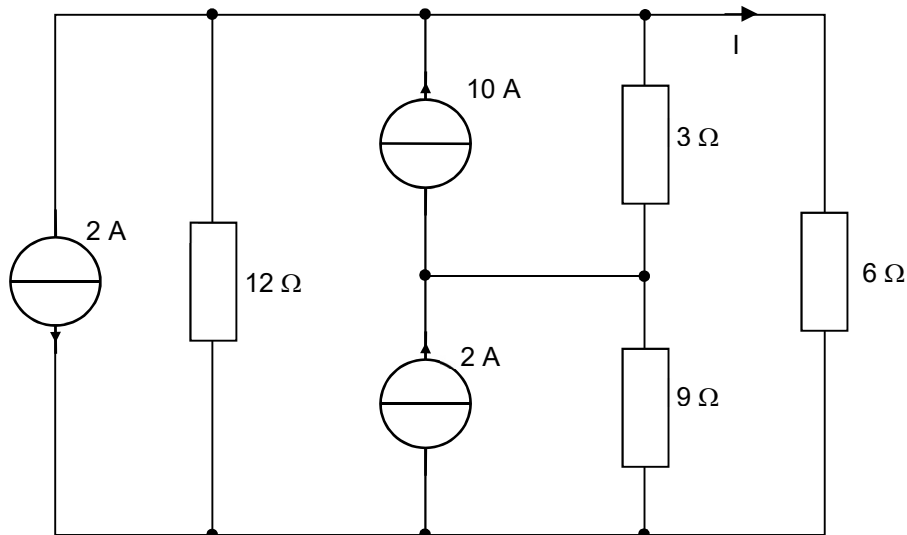
$$I = -\frac{5}{13} \text{ A}, \quad J = \frac{40}{13} \text{ A}, \quad I + J = \frac{35}{13} \text{ A}$$

3.

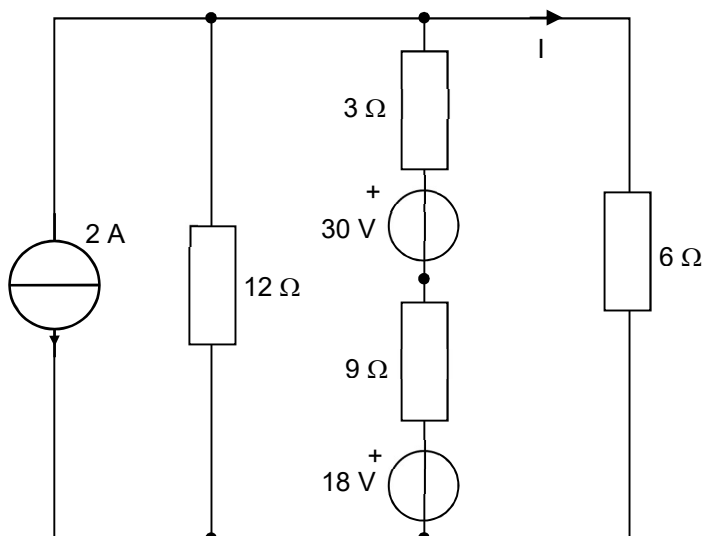


$$\Rightarrow I = \frac{8}{1 + \frac{8}{3}} = \frac{8}{11} \times 3 = \frac{24}{11} \text{ A}$$

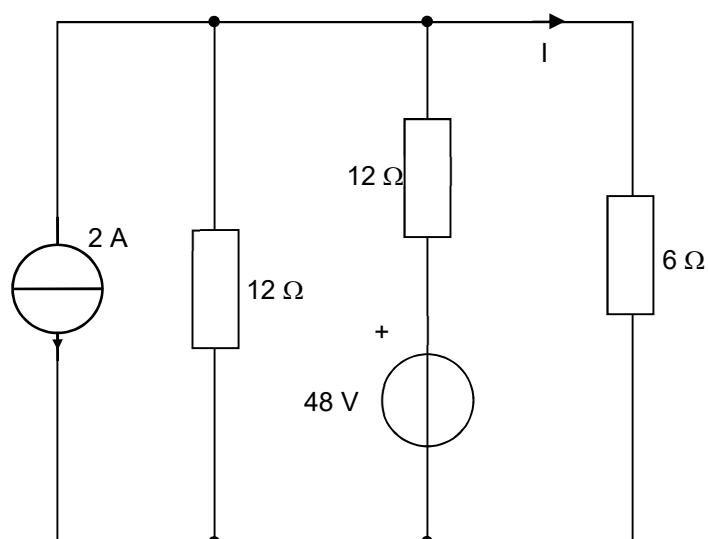
4. Lors d'une première étape, on regroupe les résistances de 12 et 4 Ω en parallèle entre elles et en parallèle avec le générateur de courant de 10 A. On les remplace par une résistance de 3 Ω. On effectue la même substitution pour les résistances de 90 et 10 Ω que l'on remplace par une résistance de 9 Ω. On obtient le schéma ci-dessous :



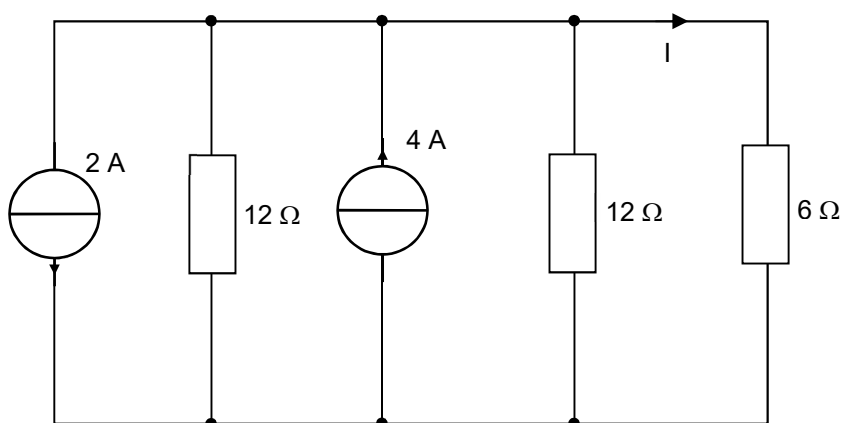
On remplace ensuite les générateurs de courant par leur équivalent sous forme de générateur de tension :



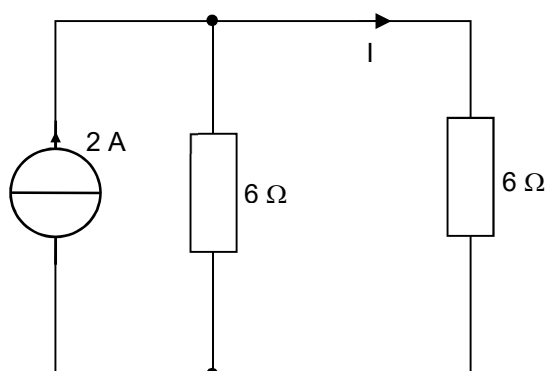
On remplace ensuite les deux générateurs de tension en série par un générateur de tension équivalent :



On remplace le générateur de tension par son équivalent sous forme de générateur de courant :

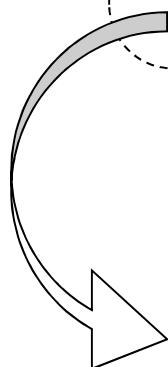
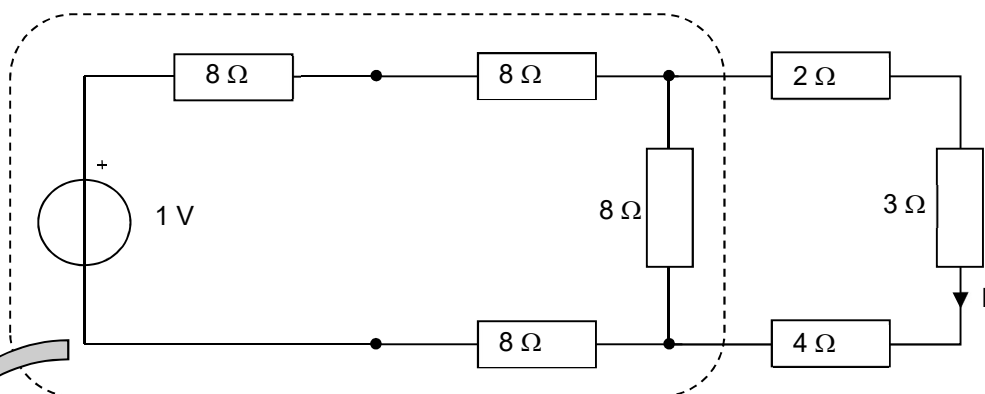
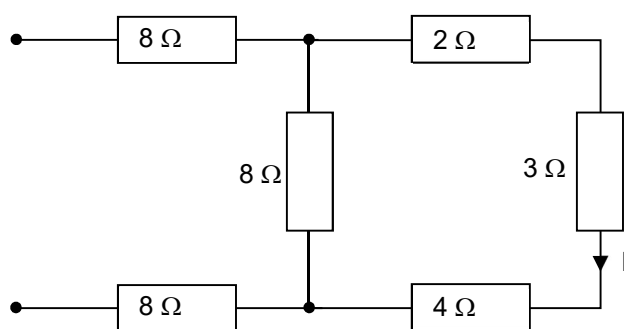
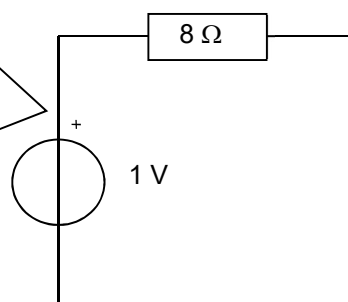
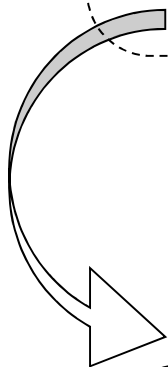
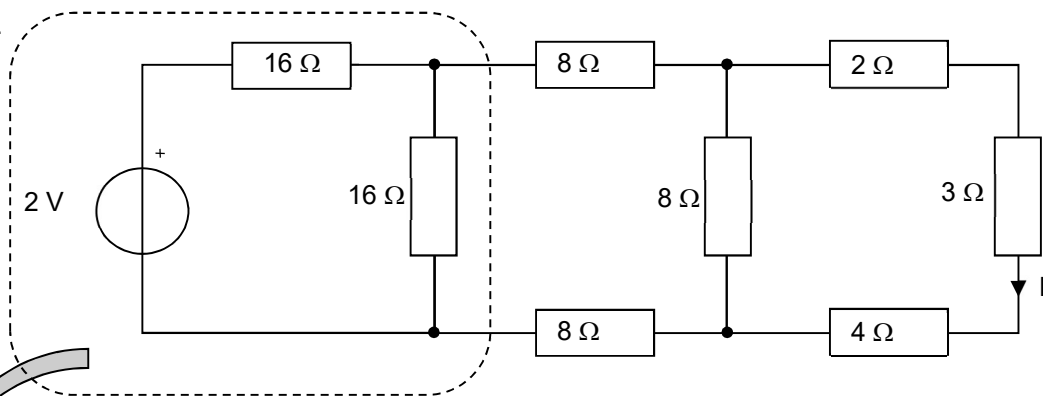


Enfin, on regroupe les générateurs de courants en un seul générateur équivalent :

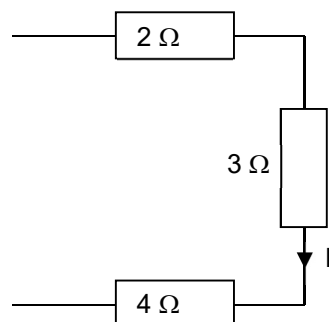
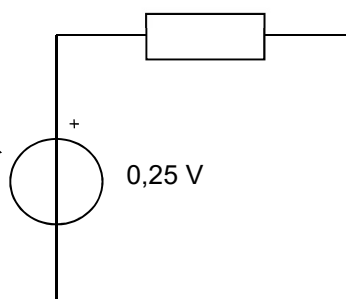


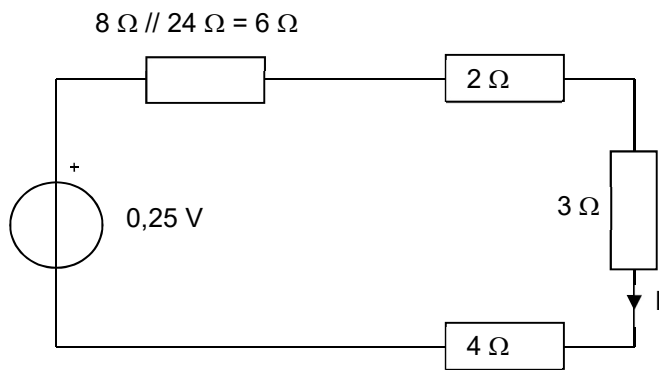
Le courant I vaut la moitié de l'intensité fournie par le générateur de courant (débit dans deux résistances identiques) soit 1 A.

5.



$$8 \Omega // 24 \Omega = 6 \Omega$$

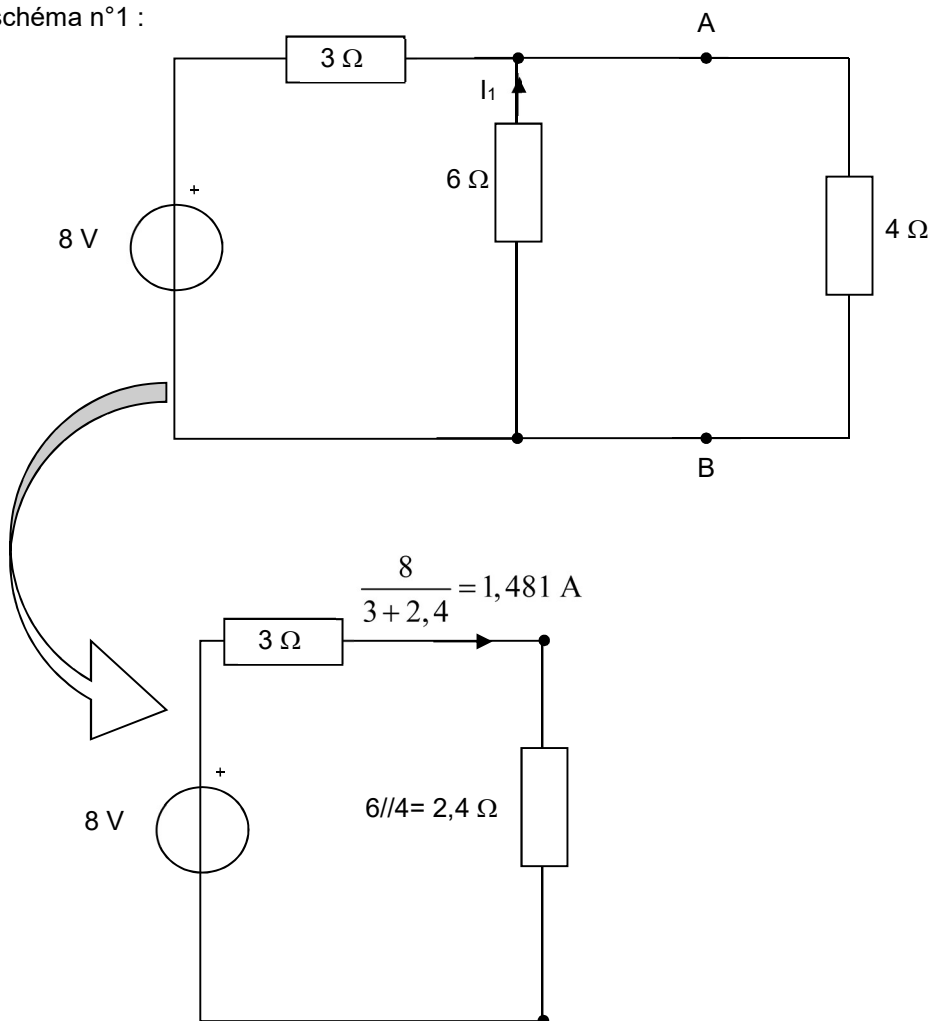




$$I = \frac{0.25}{6 + 2 + 3 + 4} = 16,66\text{ mA}$$

6. Il faut dessiner autant de schémas qu'il y a de sources, en prenant soin d'éteindre toutes les sources sauf une. On calcule une intensité pour chaque schéma. L'intensité cherchée sera la somme de ces intensités intermédiaires.

schéma n°1 :

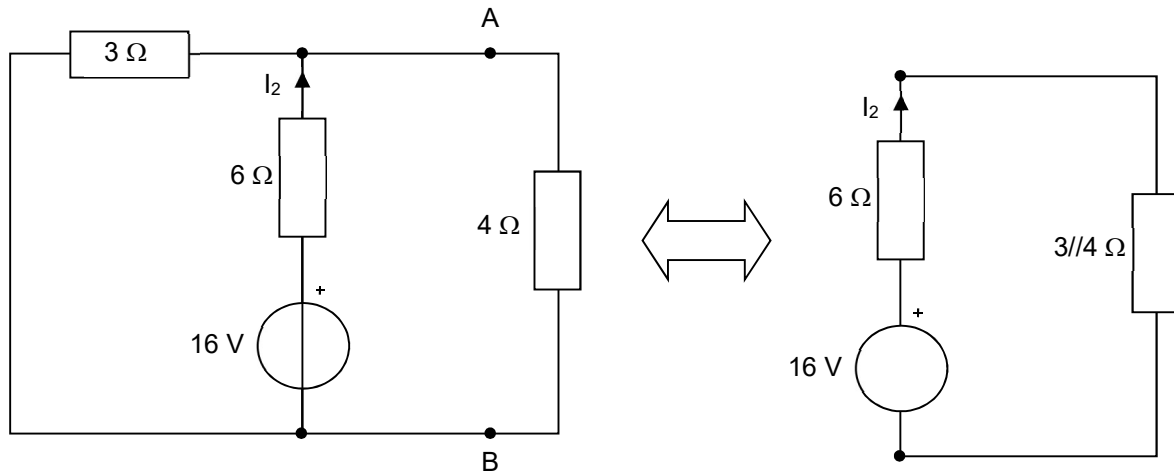


La formule du diviseur de courant nous permet de déterminer I_1 :

$$I_1 = -1,481 \times \frac{4}{6 + 4} = -0,5924\text{ A}.$$

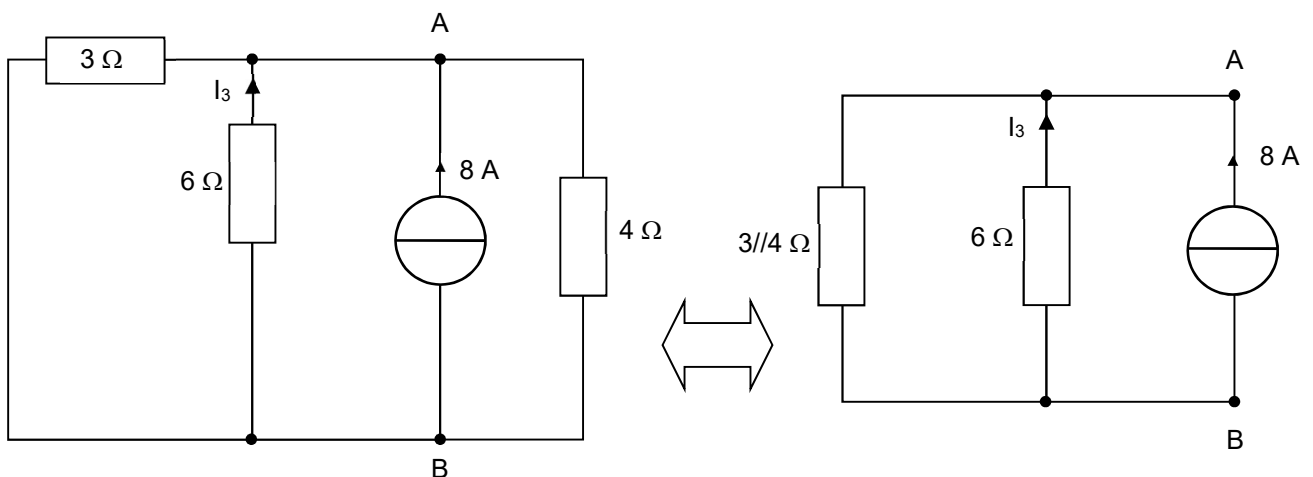
Le signe moins provient du fait que le courant I cherché va du bas vers le haut de la figure, nous avons choisi le même sens pour I_1 .

schéma n°2 :



$$\text{Ainsi, } I_2 = \frac{16}{6 + (3//4)} = 2,07407 \text{ A}$$

schéma n°3 :



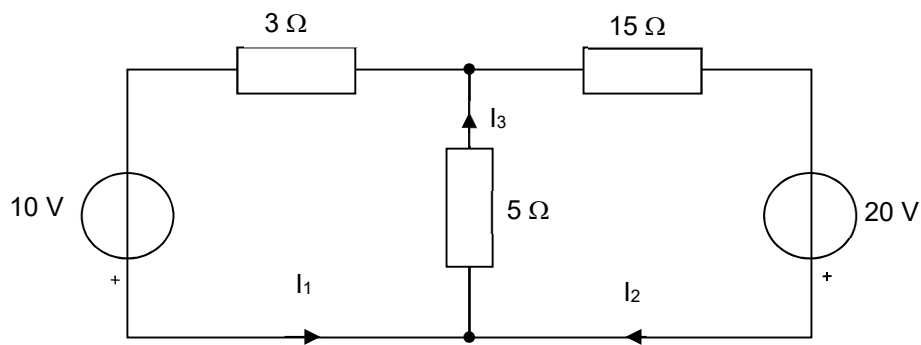
La formule du diviseur de courant nous permet de calculer I_3 :

$$I_3 = -8 \times \frac{(3//4)}{(3//4) + 6} = -1,77777 \text{ A}, \text{ étant donné le sens du débit des 8 A, } I_3 \text{ circulera du haut vers le bas et sera donc négatif.}$$

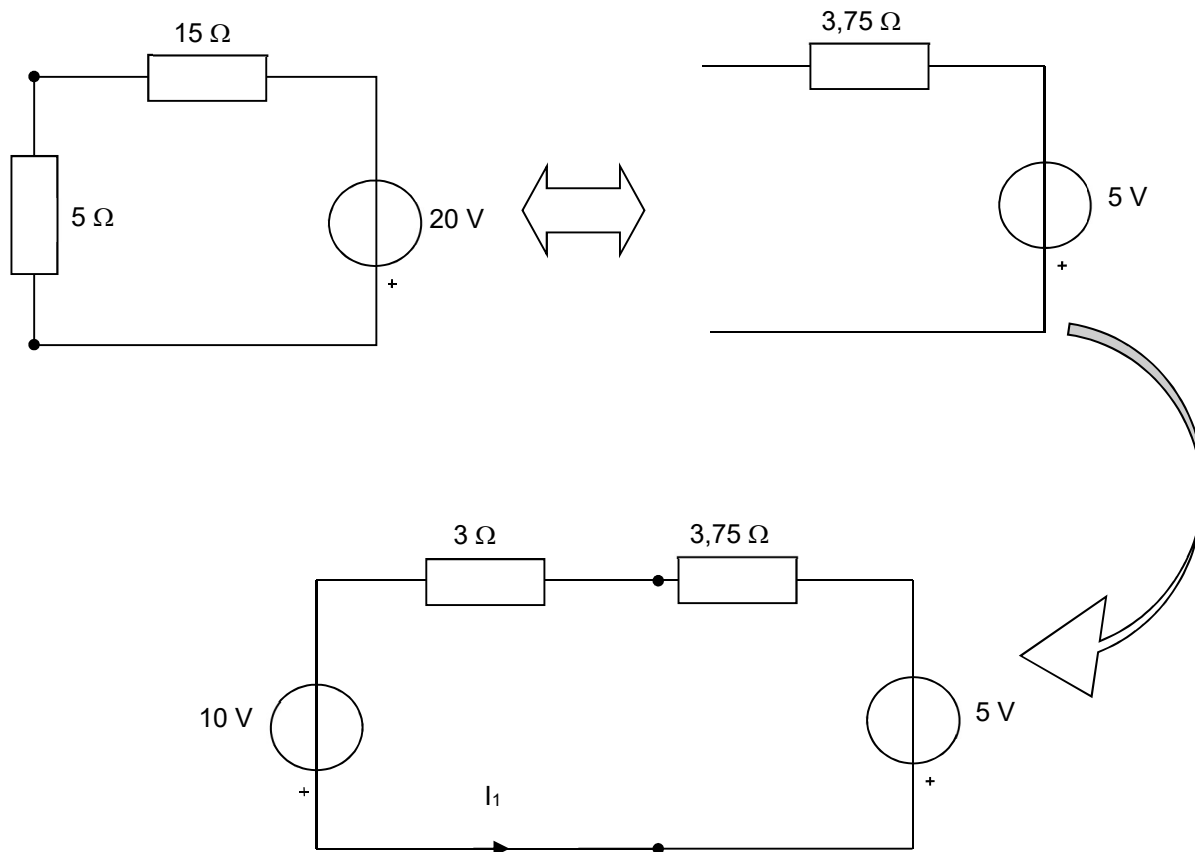
L'application du principe de superposition permet d'écrire :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -0,5924 + 2,07407 - 1,7777 = -0,296 \text{ A}$$

7. Résolvons l'exercice par la méthode de Thevenin. Numérotons les courants dans les branches :

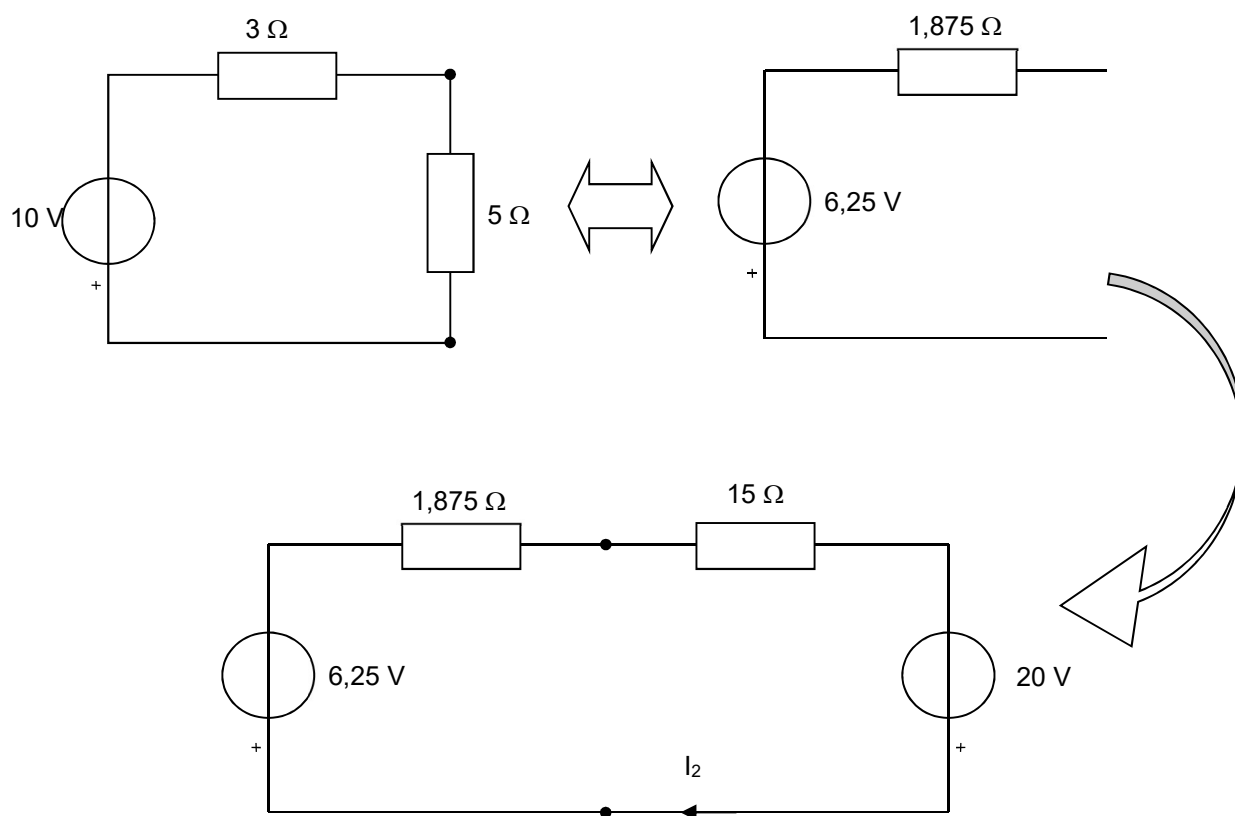


Déterminons I_1 , pour cela nous remplacerons la maille de droite par un générateur de Thevenin équivalent :



L'équation de maille permet d'écrire :
$$I_1 = \frac{10 - 5}{3 + 3,75} = 0,74 \text{ A}$$

Déterminons I_2 , pour cela nous remplacerons la maille de gauche par un générateur de Thevenin équivalent :

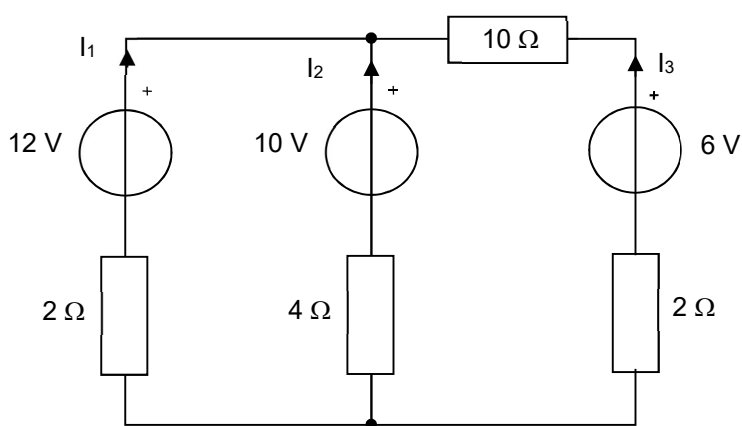


L'équation de maille permet d'écrire $I_2 = \frac{20 - 6,25}{15 + 1,875} = 0,819\text{ A}$

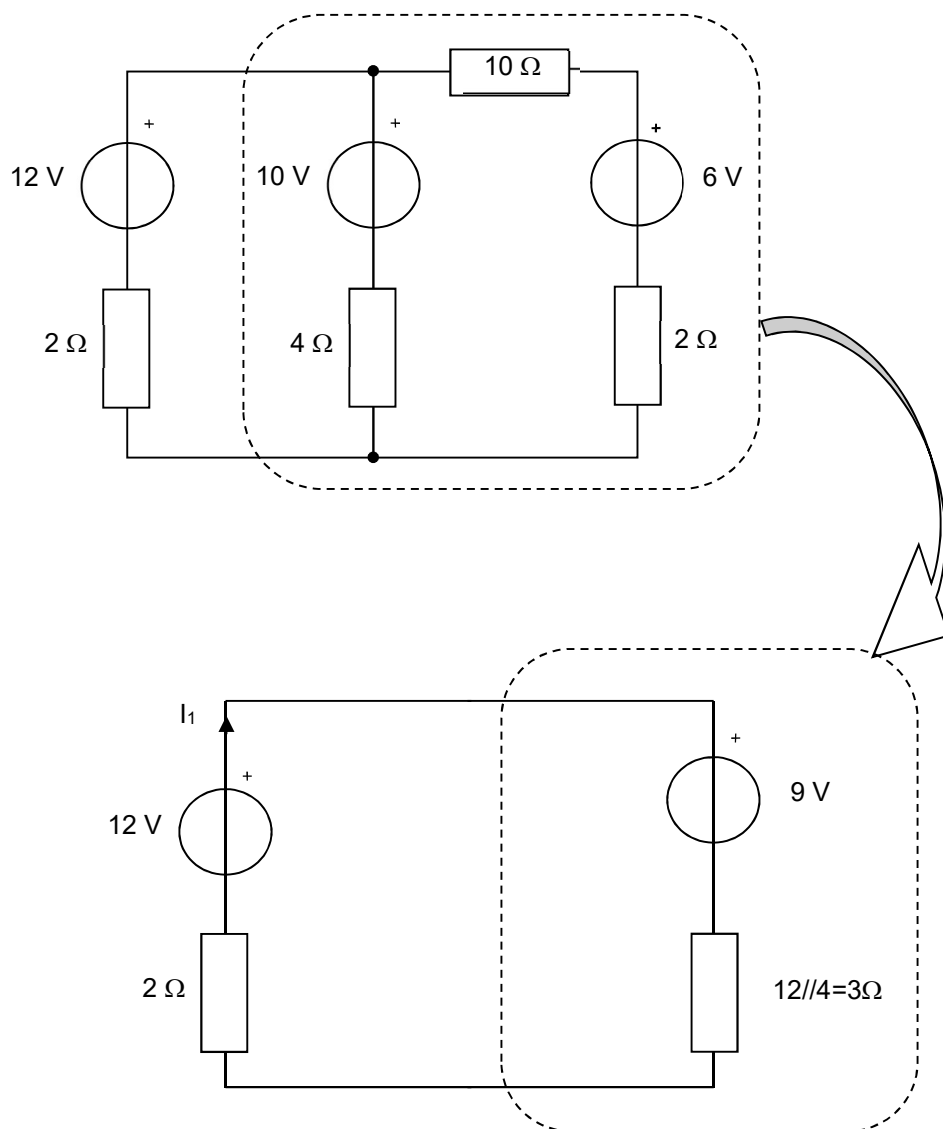
L'équation au nœud inférieur du schéma de départ permet d'écrire :

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,819 + 0,74 = 1,55\text{ A}$$

8. Là encore, une résolution par Thevenin est plus rapide qu'une résolution par Kirchhoff.

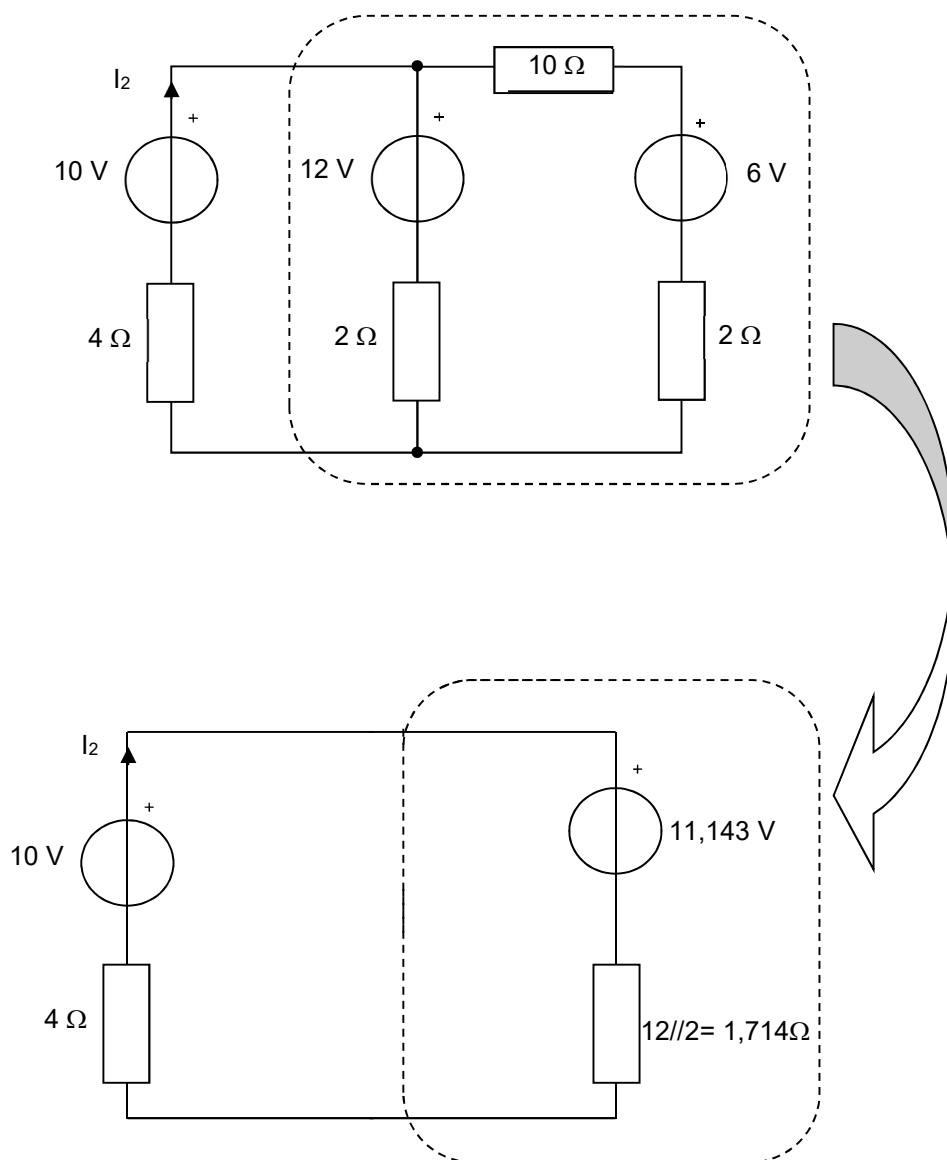


Calcul de I_1 :



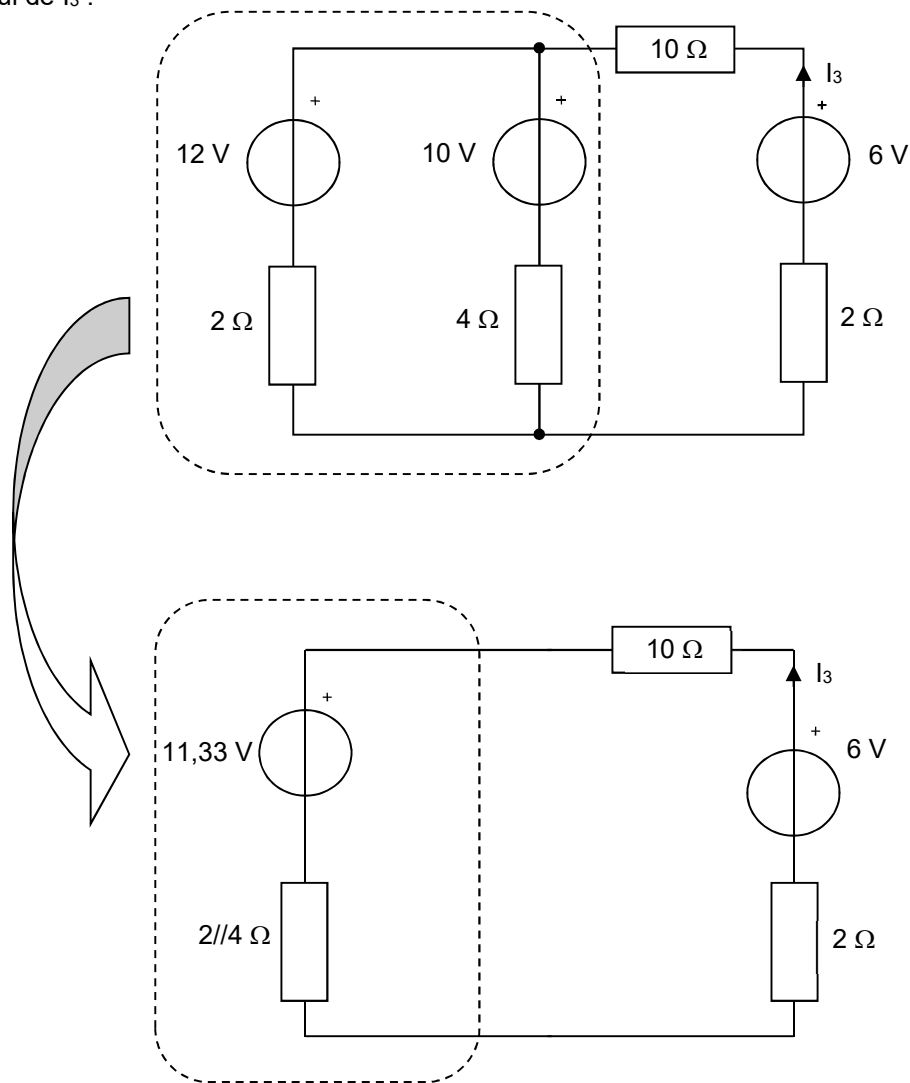
$$I_1 = \frac{12-9}{2+3} = 0,6\text{ A}$$

Calcul de I_2 :



$$I_2 = \frac{10 - 11,1429}{4 + 1,714} = -0,2\ \text{A} , \text{ le courant } I_2 \text{ descend donc du haut vers le bas sur le schéma.}$$

Calcul de I_3 :

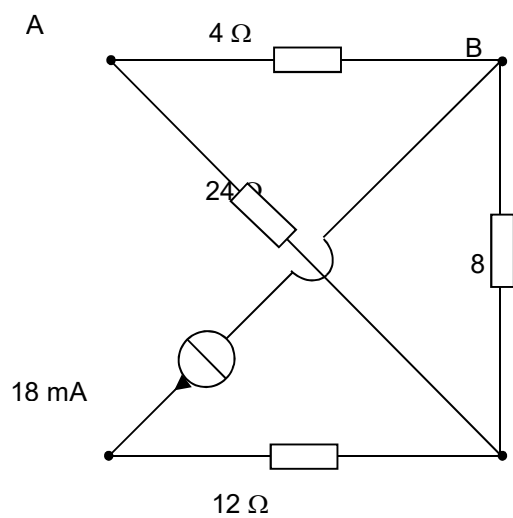


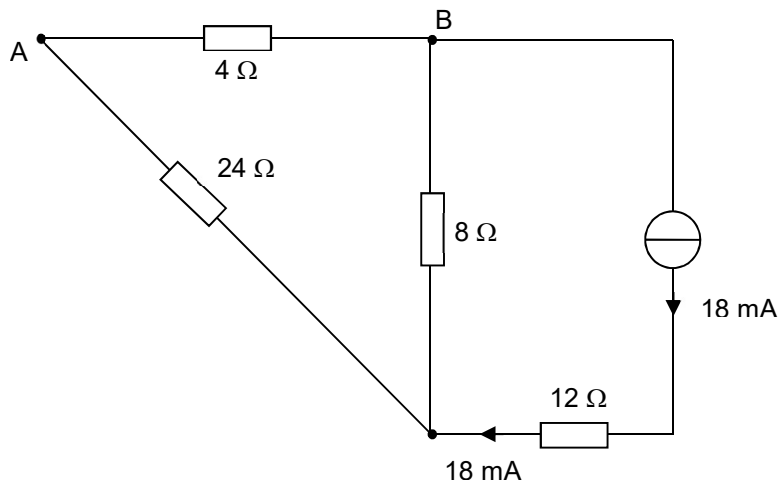
$$I_3 = \frac{6 - 11,333}{10 + 2 + (2 // 4)} = -0,40 \text{ A} , \text{ ici également, le courant } I_3 \text{ circule dans le sens contraire de la flèche.}$$

9. Par le principe de superposition :

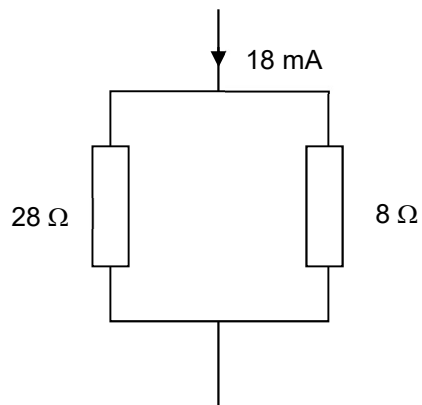
Il y a deux générateurs, il faut donc extraire deux sous-circuits, calculer V_{AB} pour chacun d'eux et en faire la somme algébrique.

Sous circuit n°1 :





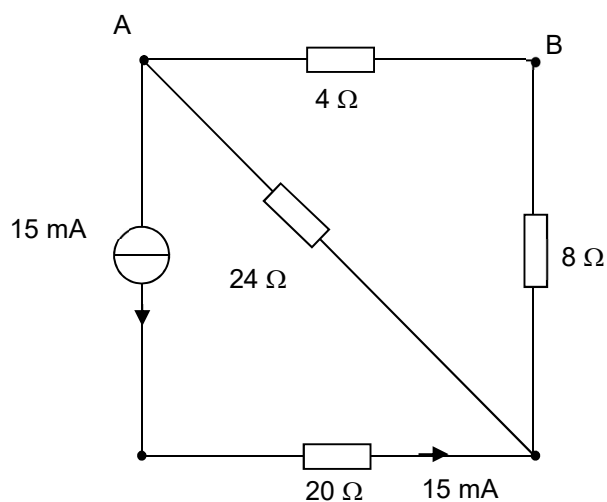
Le courant de 18 mA se divise dans le diviseur constitué de la résistance de $8\ \Omega$ d'une part et des résistances de 24 et $4\ \Omega$ en série d'autre part :



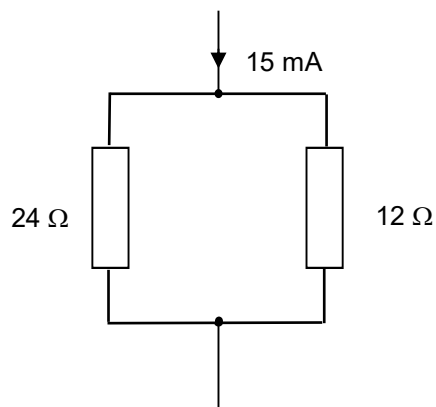
L'intensité dans les résistances de 24 et $4\ \Omega$ est : $18 \times \frac{8}{28+8} = 4\ \text{mA}$

Ainsi, $V_{AB} = +16\ \text{mV}$ dans ce premier circuit.

Sous circuit n°2 :



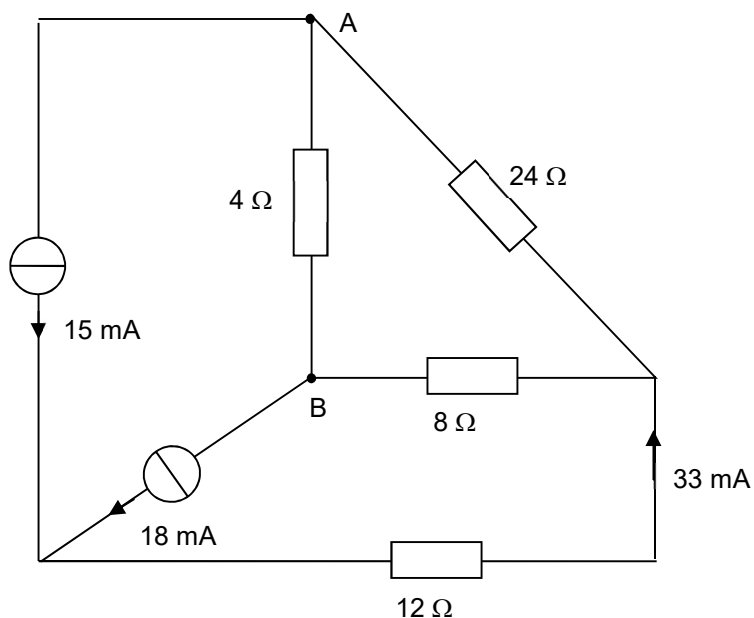
L'intensité de 15 mA traverse le diviseur de courant constitué de la résistance de $24\ \Omega$ en parallèle avec les résistances de 8 et de $4\ \Omega$ en série :



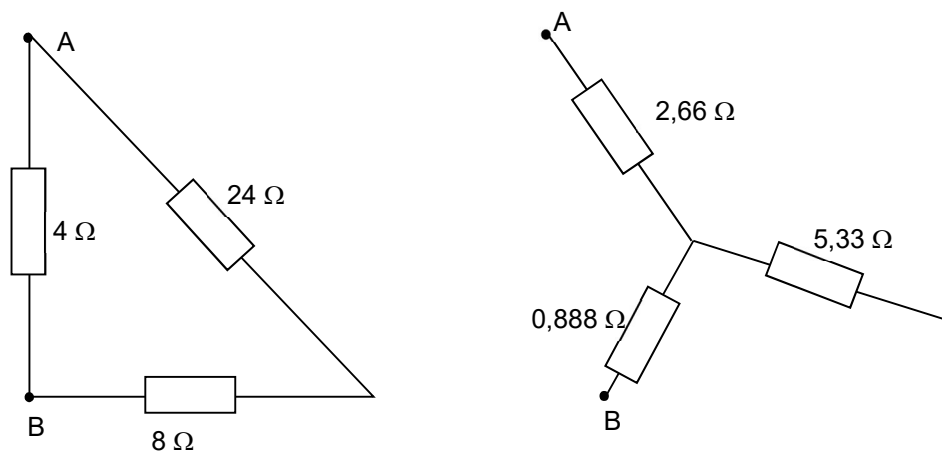
Soit une intensité de : $15 \times \frac{24}{24 + 12} = 10\ \text{mA}$ et donc pour ce sous circuit, $V_{AB} = -40\ \text{mV}$ (attention au sens du courant !).

Lorsque l'on superpose les deux circuits, on a $V_{AB} = +16 - 40 = -24\ \text{mV}$

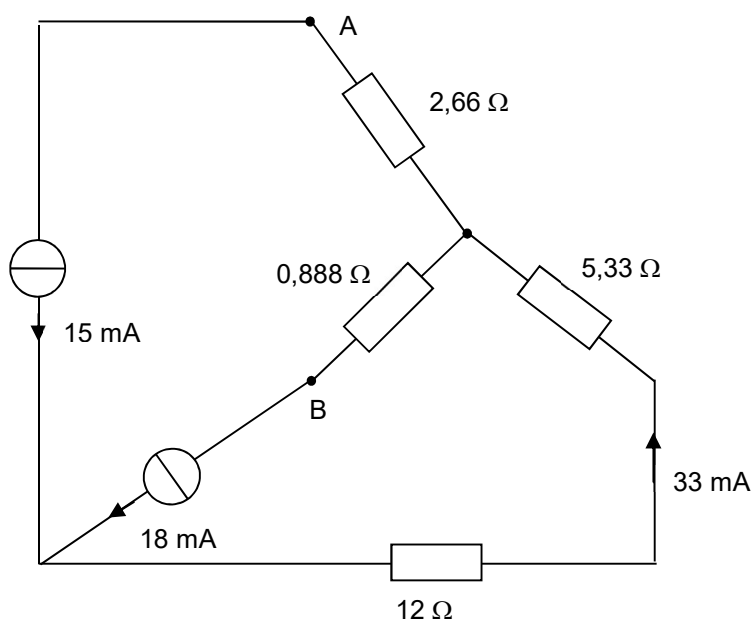
Deuxième solution par Kennelly, on redessine la figure :



Le triangle se transforme en étoile :



Le circuit se transforme en :



$$V_{AB} = 0,888 \times 18 \cdot 10^{-3} - 2,66 \times 15 \cdot 10^{-3} = 24 \text{ mV}$$

Exercices

1. Application simple du théorème de Millman *

Dans le montage représenté sur la Figure 2.7, déterminer le potentiel au point A.

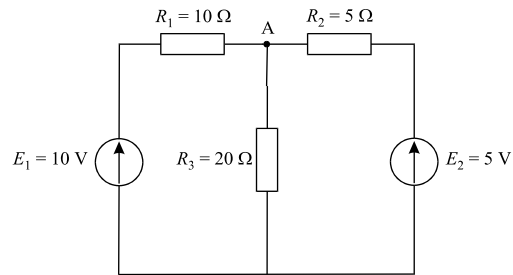


Figure 2.7

Conseil méthodologique

Il s'agit ici d'appliquer simplement le théorème. Le potentiel recherché s'exprime en fonction des potentiels aux nœuds voisins. Attention : une des branches est reliée à la masse.

2. Calcul d'un courant à partir du théorème de Millman **

Dans le montage représenté sur la Figure 2.8, déterminer la valeur du courant qui circule dans la résistance R_X .

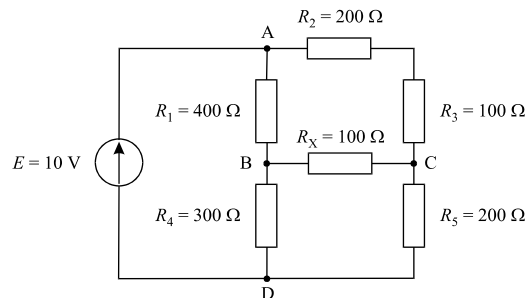


Figure 2.8

Conseil méthodologique

On commencera par nommer et par placer arbitrairement le courant dans la résistance R_X . Par exemple I_X orienté de B vers C. Le calcul de ce courant nécessite la connaissance de $V_B - V_C$, donc des deux potentiels V_B et V_C . C'est le théorème de Millman, appliqué deux fois, qui permet d'accéder à ces deux potentiels. Il peut être intéressant, ici, d'écrire le théorème de Millman en utilisant les conductances et ce, afin d'alléger l'écriture des équations.

3. Application du principe de superposition dans un circuit à deux générateurs *

Dans le montage représenté sur la figure 2.9, déterminer le courant I dans la résistance R_3 .

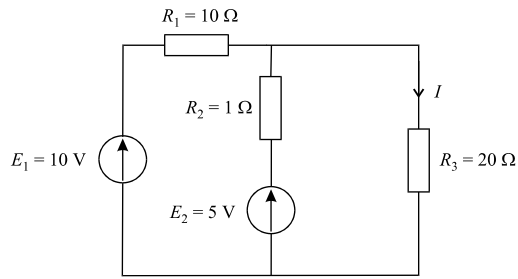


Figure 2.9

Conseil méthodologique

Il y a deux générateurs de tension dans le circuit. Le circuit n'étant composé que d'éléments linéaires, le courant I résulte de la superposition de deux courants : un courant que nous pouvons appeler I_1 et qui est dû à la seule présence de E_1 et un courant que nous pouvons appeler I_2 et qui est dû à la seule présence de E_2 . Il s'agit bien ici d'appliquer le principe de superposition. Attention : lorsqu'on éteint une source de tension, on la remplace par un court-circuit.

4. Application du principe de superposition dans un circuit à trois générateurs**

Dans le montage représenté sur la figure 2.10, déterminer le courant I dans la résistance R_2 .

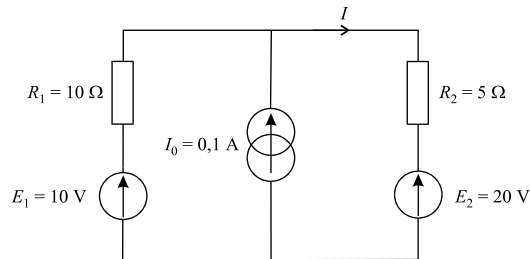


Figure 2.10

Conseil méthodologique

Il s'agit bien ici d'utiliser à nouveau le principe de superposition dans ce circuit linéaire qui possède trois générateurs. Le courant I s'exprime donc sous la forme d'une somme de trois courants. Attention : lorsqu'on éteint une source de courant, il faut la remplacer par un circuit ouvert.

5. Calcul du générateur de Thévenin équivalent à un dipôle simple *

Déterminer le générateur équivalent de Thévenin du dipôle AB représenté sur la figure 2.11 en calculant successivement la résistance équivalente du dipôle puis sa tension à vide.

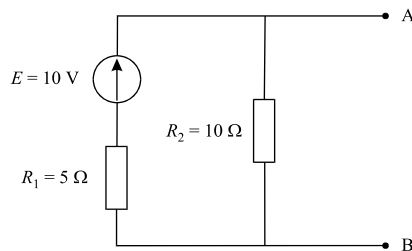


Figure 2.11

Conseil méthodologique

L'énoncé impose la méthode de détermination du dipôle équivalent de Thévenin, par un calcul successif de la résistance équivalente et de la tension à vide. La résolution de cet exercice se fait donc en deux temps. Pour calculer la résistance équivalente, il faut éteindre les sources. Puis, on détermine la tension à vide du dipôle qui n'est autre que la tension aux bornes de R_2 .

6. Calcul du générateur de Thévenin équivalent à un dipôle *

Déterminer le générateur équivalent de Thévenin (E_0 et R_{eq}) du dipôle AB représenté sur la figure 2.12.

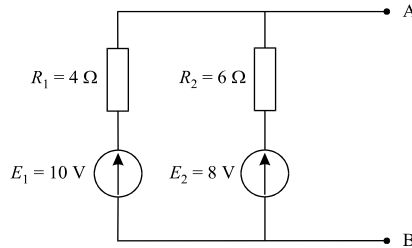


Figure 2.12

Conseil méthodologique

L'énoncé n'impose pas de méthode particulière pour déterminer les éléments du générateur de Thévenin. On peut procéder comme dans l'exercice 2.5 ou, pourquoi pas, effectuer des transformations Thévenin – Norton successives. Nous conseillons au lecteur d'opter pour cette seconde stratégie.

7. Calcul d'un courant par transformations Thévenin Norton successives ***

Déterminer le courant I dans la résistance R_5 du circuit représenté sur la figure 2.13.

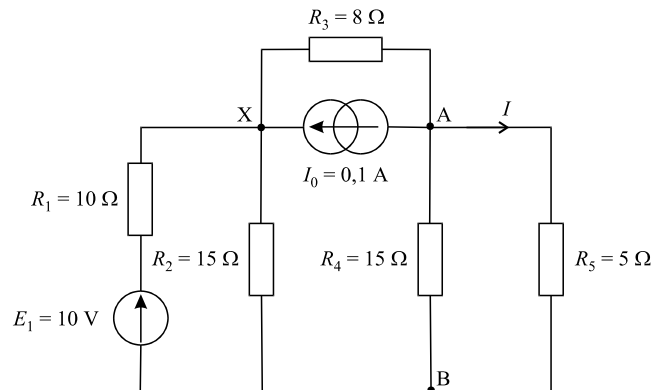


Figure 2.13

Conseil méthodologique

Le circuit proposé est suffisamment complexe pour nous dissuader de déployer des outils trop simples comme les lois de Kirchhoff qui nous conduiraient à un trop grand nombre d'équations. En remarquant que la résistance R_5 est en fait alimentée par le dipôle AB constitué du reste du circuit, il est préférable d'envisager la recherche du générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle AB, par exemple en effectuant des transformations Thévenin – Norton adéquates successives.

8. Calcul d'un courant par transformations Thévenin Norton successives**

Déterminer le courant I dans la résistance R du circuit représenté sur la figure 2.14, en n'utilisant que la technique de la transformation Thévenin-Norton.

Application numérique :

$$E_1 = 10 \text{ V}, I_2 = 100 \text{ mA}, E_3 = 7 \text{ V}$$

$$R_1 = 60 \Omega, R_2 = 100 \Omega, R_3 = 40 \Omega, R = 30 \Omega$$

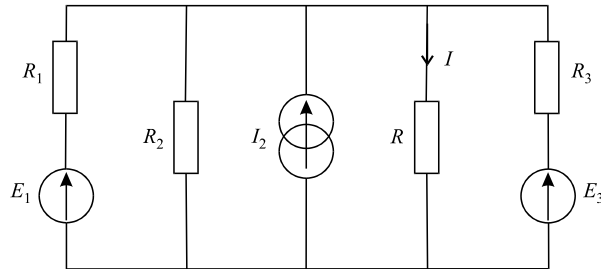


Figure 2.14

Conseil méthodologique

Le circuit proposé est constitué de plusieurs branches disposées en parallèle. On peut donc, sans rien modifier au montage, permuter les branches. Une de ces permutations permet de mettre en évidence le fait que la résistance R est en fait alimentée par le reste du circuit que nous considérerons comme un dipôle AB dont on cherchera le générateur équivalent de Thévenin.

9. Calcul d'une différence de potentiels à partir du théorème de Millman**

On considère le montage représenté sur la figure 2.15.

- Déterminer l'expression du potentiel V_A en fonction de V_B et de E .
- Déterminer l'expression du potentiel V_B en fonction de V_A .
- En déduire la valeur de la différence de potentiels $V_A - V_B$.

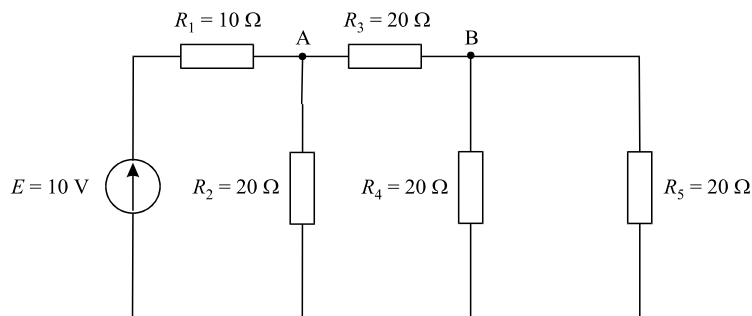


Figure 2.15

Conseil méthodologique

Pour répondre aux deux premières questions, il suffit d'appliquer le théorème de Millman d'abord au point A, puis au point B. En combinant les deux expressions, on arrive rapidement à la valeur de V_A puis à celle de V_B .

10. Transformation triangle étoile***

On considère l'association des trois résistances R_1 , R_2 et R_3 dite *en triangle*, représentée sur la figure 2.16. Soit I_A , I_B et I_C les courants entrant respectivement aux points A, B et C et V_A , V_B , V_C les tensions en ces mêmes points.

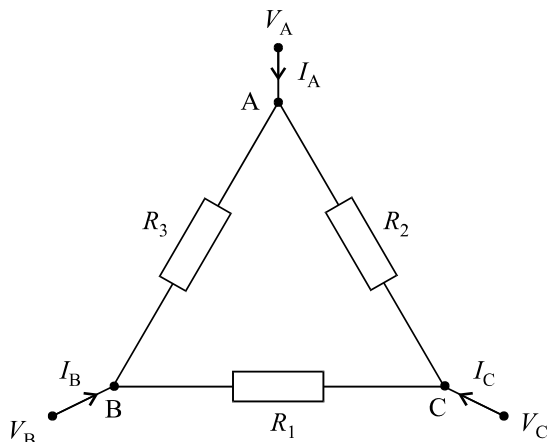


Figure 2.16

On se propose de démontrer qu'il existe une association dite *en étoile* équivalente à cette association en triangle, autrement dit, de montrer qu'il existe un schéma tel que celui représenté sur la figure 2.17, pour lequel les courants I_A , I_B et I_C sont inchangés, et ce pour les mêmes valeurs des tensions aux points A, B et C. On se propose de déterminer les valeurs de R_1 , R_2 et R_3 en fonction de R_A , R_B et R_C .

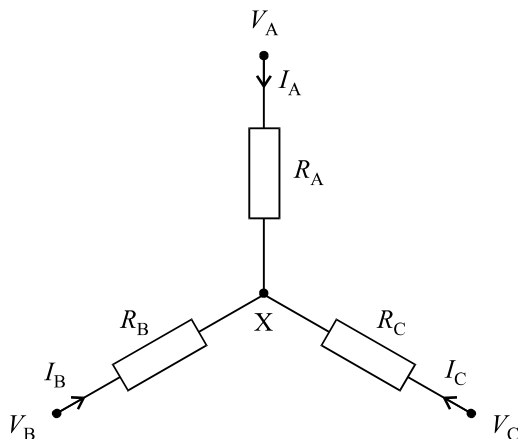


Figure 2.17

- Dans le schéma de la figure 2.17, appliquer le théorème de Millman au point X et exprimer V_X en fonction de V_A , V_B et V_C .
- En déduire les valeurs des courants I_A , I_B et I_C en fonction de V_A , V_B et V_C d'une part et de R_A , R_B et R_C d'autre part.
- Dans le schéma de la figure 2.16, déterminer les courants I_A , I_B et I_C en fonction de V_A , V_B et V_C d'une part et de R_1 , R_2 et R_3 d'autre part.
- En déduire les valeurs de R_1 , R_2 et R_3 en fonction de R_A , R_B et R_C .

- e. On considère le circuit représenté sur la figure 2.18. En exploitant les résultats précédents et en calculant la résistance équivalente de l'ensemble du réseau de résistances, déterminer le courant I dans le circuit.

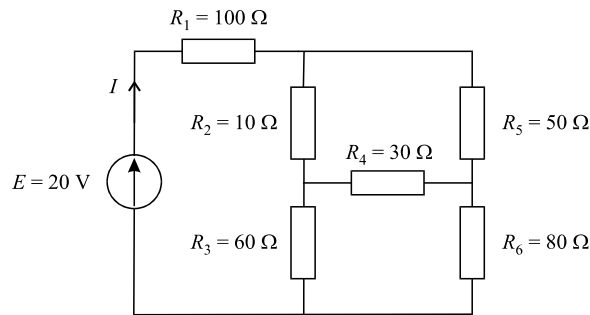


Figure 2.18

Conseil méthodologique

La première question ne pose aucune difficulté. On applique simplement le théorème de Millman pour disposer de l'expression du potentiel V_X . Cette expression est alors utilisée dans la question 2 pour calculer les expressions des courants demandés. On pourra se contenter de calculer I_A et d'en déduire les deux autres courants en remarquant la symétrie parfaite du dispositif. La question 3 propose de calculer les expressions des courants dans le montage triangle. Il convient ensuite d'identifier les expressions avec le montage étoile pour mettre en évidence les conditions d'équivalence recherchées. La question 5 est une application de cette transformation triangle – étoile : le calcul de la résistance équivalente du circuit nécessite une transformation de ce type.

11. Calcul d'un courant par transformations Thévenin Norton successives ***

On considère le montage représenté sur la figure 2.19 et on se propose de déterminer la valeur du courant I circulant dans la résistance R .

- Montrer que la résistance R est alimentée par un dipôle AB que l'on identifiera.
- Déterminer le générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle AB.
- En déduire la valeur du courant I .

Conseil méthodologique

On peut bien sûr considérer que la résistance R est connectée à un dipôle formé du reste du circuit. Une fois la résistance R ôtée du circuit, on cherchera les transformations Thévenin – Norton successives qui nous amèneront à réduire le circuit à sa plus simple expression. Le calcul du courant recherché est alors immédiat.

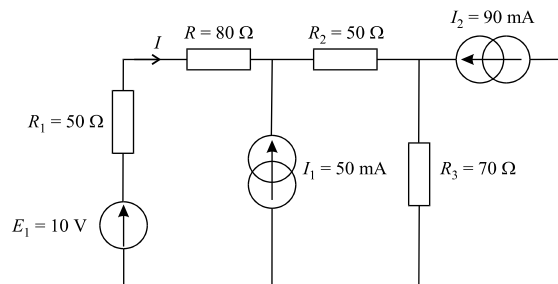


Figure 2.19

Réponses

1. Appliquons le théorème de Millman au point A :

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{0}{R_3} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{10}{10} + \frac{5}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 5,7 \text{ V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : A priori, cet exercice ne présente aucune difficulté. Toutefois, une erreur est fréquemment commise dans l'application du théorème de Millman si on omet de comptabiliser au dénominateur les résistances situées dans les branches reliées à la masse.

2. Soit I_X le courant circulant dans la résistance R_X , orienté de B vers C.
La loi d'Ohm nous donne immédiatement :

$$I_X = \frac{V_B - V_C}{R_X}$$

Il suffit donc de calculer la différence de potentiels $V_B - V_C$.
Appliquons le théorème de Millman au point B.

$$V_B = \frac{\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_D}{R_4} + \frac{V_C}{R_X}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_X}} = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{V_C}{R_X}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_X}}$$

car $V_D = 0$.

Nous avons obtenu une équation liant V_B et V_C . En appliquant le théorème de Millman au point C, nous obtiendrons une seconde équation avec les mêmes inconnues :

$$V_C = \frac{\frac{E}{R_2 + R_3} + \frac{V_B}{R_X}}{\frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_X}}$$

Ces expressions sont plus faciles à manipuler si on introduit les conductances des dipôles.

On posera, notamment : $G_S = \frac{1}{R_2 + R_3}$

Soit : $V_B = \frac{G_1 E + G_X V_C}{G_1 + G_4 + G_X}$ et $V_C = \frac{G_S E + G_X V_B}{G_S + G_5 + G_X}$

Remplaçons V_C par son expression dans l'expression de V_B :

$$V_B = \frac{G_1 E + G_X \frac{G_S E + G_X V_B}{G_S + G_5 + G_X}}{G_1 + G_4 + G_X}$$

Soit : $V_B = \frac{(G_S + G_5 + G_X)G_1 E + G_X(G_S E + G_X V_B)}{(G_1 + G_4 + G_X)(G_S + G_5 + G_X)}$

D'où : $V_B = E \frac{G_X G_S + G_1(G_S + G_5 + G_X)}{(G_1 + G_4 + G_X)(G_S + G_5 + G_X) - G_X^2}$

Application numérique :

$$G_X = 10^{-2} \text{ S}, \quad G_1 = 2,5 \times 10^{-3} \text{ S}, \quad G_S = 3,33 \times 10^{-3} \text{ S}$$

$$G_4 = 3,33 \times 10^{-3} \text{ S}, \quad G_5 = 5 \times 10^{-3} \text{ S}$$

$$\text{On a :} \quad V_B = 4,16 \text{ V}$$

$$\text{D'où :} \quad V_C = \frac{G_S E + G_X V_B}{G_S + G_5 + G_X} = 4,09 \text{ V}$$

D'où le calcul du courant I_X :

$$I_X = \frac{V_B - V_C}{R_X} = \frac{4,16 - 4,09}{100} = 0,7 \text{ mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le théorème de Millman est un outil intéressant dès lors que l'on cherche à déterminer une grandeur isolée dans un circuit. On notera également que l'utilisation des conductances allège sensiblement les écritures. Par ailleurs, il convient de veiller à l'homogénéité des équations. Il est conseillé, lorsque les calculs génèrent des expressions relativement longues, de vérifier systématiquement que les équations sont bien homogènes avant de faire l'application numérique. Par exemple, dans l'équation donnant l'expression de V_B , on remarque effectivement que dans la fraction, le numérateur et le dénominateur sont homogènes à des conductances au carré. La fraction est donc bien sans dimension et V_B est bien homogène à une tension.

3. Dans un premier temps, court-circuitons E_2 (figure 2.20). Soit I_1 le courant dans la résistance R_3 .

Calculons ce courant I_1 : il est clair que la connaissance du potentiel au point A nous permettra d'accéder à la valeur du courant I_1 . Appliquons le théorème de Millman au point A.

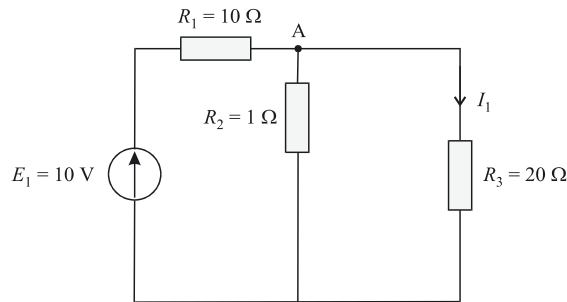


Figure 2.20

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{10}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{20}} = 0,87 \text{ V}$$

On en déduit immédiatement la valeur de I_1 :

$$I_1 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{0,87}{20} = 43,5 \text{ mA}$$

Dans un second temps, court-circuitons E_1 (figure 2.21). Soit I_2 le courant dans la résistance R_3 .

Procédons de la même manière que précédemment en appliquant le théorème de Millman au point A :

$$V_A = \frac{\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{20}} = 4,35 \text{ V}$$

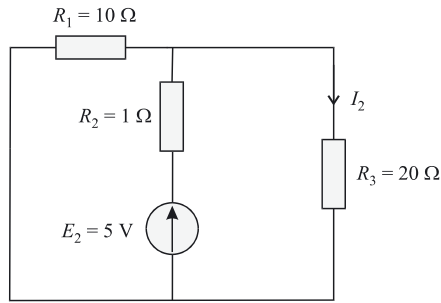


Figure 2.21

D'où :

$$I_2 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{4,35}{20} = 217,5 \text{ mA}$$

Appliquons le principe de superposition : en présence des deux générateurs E_1 et E_2 , le courant I dans la résistance R_3 vaut :

$$I = I_1 + I_2 = 43,5 \times 10^{-3} + 217,5 \times 10^{-3} = 261 \text{ mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le principe de superposition permet d'accéder rapidement à des grandeurs électriques, courants ou tensions, à l'intérieur d'un circuit comportant plusieurs sources. Ne pas oublier que ce principe s'applique à condition que le circuit soit bien linéaire et à condition que les sources soient indépendantes. Bien retenir qu'un générateur de tension est éteint lorsqu'il est remplacé par un court-circuit.

4. Nous allons calculer successivement ce courant en ne laissant subsister, à chaque fois, qu'un seul des trois générateurs.

En présence de E_1 seul, le circuit devient celui de la figure 2.22.

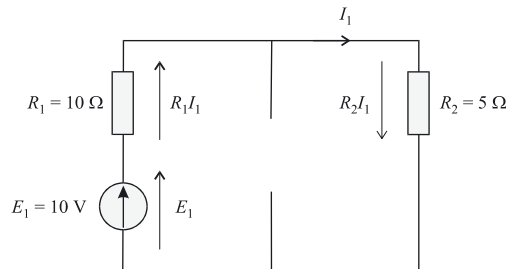


Figure 2.22

La loi des mailles nous donne :

$$E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_1 = 0$$

Le courant I_1 qui circule dans R_2 vaut donc, de toute évidence :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{10}{15} = 0,66 \text{ A}$$

Ne jamais oublier que lorsqu'on annule un générateur de tension, on le court-circuite, et que lorsqu'on annule un générateur de courant, on le remplace par un circuit ouvert.

En présence de E_2 seul, le circuit devient celui de la figure 2.23.

La loi des mailles appliquée dans l'unique maille du circuit nous donne :

$$E_2 + R_1 I_2 + R_2 I_2 = 0$$

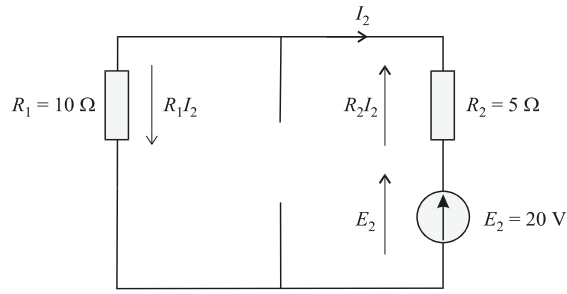


Figure 2.23

Soit :

$$I_2 = -\frac{E_2}{R_1 + R_2} = -\frac{20}{15} = -1,33 \text{ A}$$

Calculons pour terminer, le courant I_3 circulant dans la résistance R_2 en présence du seul générateur de courant (figure 2.24).

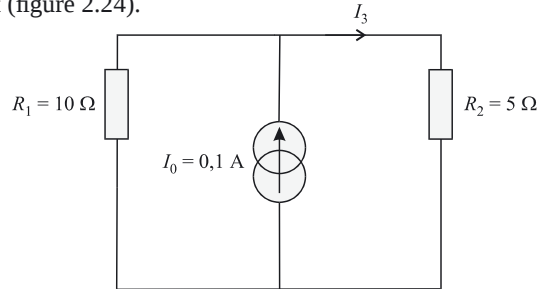


Figure 2.24

Modifions le dessin (sans changer le circuit) de manière à faire apparaître le fait que le générateur de courant débite dans une résistance équivalente à l'association parallèle de R_1 et R_2 (figure 2.25).

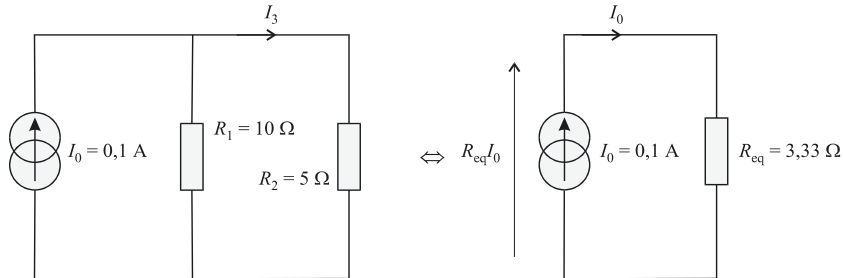


Figure 2.25

Le générateur débite donc dans une résistance R_{eq} telle que :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 5}{10 + 5} = 3,33 \Omega$$

La différence de potentiel aux bornes du générateur de courant vaut donc :

$$U = R_{eq} I_0 = 3,33 \times 0,1 = 0,33 \text{ V}$$

En observant à nouveau le schéma de la figure 2.25, cette différence de potentiel se trouve également être la tension aux bornes de R_2 . On a donc :

$$U = R_{eq} I_0 = R_2 I_3$$

$$I_3 = \frac{R_{eq} I_0}{R_2} = \frac{0,33}{5} = 0,066 \text{ A}$$

Appliquons enfin le principe de superposition. En présence des trois générateurs, le courant I est égal à la somme des courants I_1 , I_2 et I_3 :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0,66 - 1,33 + 0,066 = -0,6 \text{ A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il faut veiller à respecter scrupuleusement les conventions récepteurs pour tous les dipôles autres que le générateur, sinon, les calculs des courants seront inévitablement faux. Ne pas avoir peur de perdre du temps en dessinant toutes les flèches de tensions dans le circuit (en respectant les conventions) : une trop grande précipitation conduit souvent à des erreurs de signes. Par ailleurs, dans le principe de superposition, la notion de somme est algébrique. Dans notre problème, l'un des courants est négatif et doit rester négatif dans la somme finale. Le courant total dans R_2 étant négatif, cela signifie que le courant circule en réalité dans le sens opposé à celui proposé dans l'énoncé.

5. Le dipôle AB de la figure 2.11 est équivalent au générateur de Thévenin représenté sur la figure 2.26, R_{eq} représentant la résistance équivalente du dipôle lorsque E est court-circuité, et E_0 la tension à vide du dipôle.

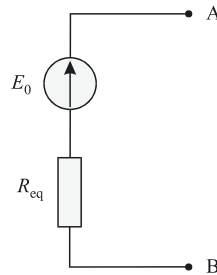


Figure 2.26

R_{eq} se trouve être la résistance équivalente à l'association parallèle de R_1 et R_2 .

Donc :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 5}{10 + 5} = 3,33 \Omega$$

Pour déterminer la tension à vide E_0 du dipôle AB, il suffit d'écrire la loi des mailles dans le circuit de la figure 2.11.

La tension aux bornes de R_2 correspondra bien à cette tension à vide (figure 2.27).

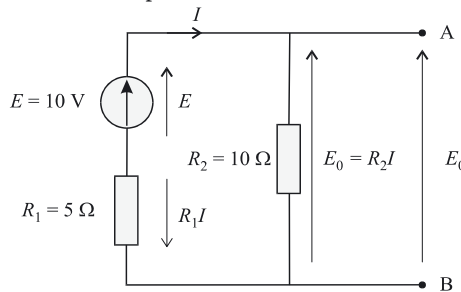


Figure 2.27

On a :

$$\begin{cases} E_0 = R_2 I \\ E - R_2 I - R_1 I = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Soit :

$$E_0 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \times \frac{10}{15} = 6,67 \text{ V}$$

Le générateur de Thévenin équivalent au dipôle AB est donc un générateur de tension $E_0 = 6,67 \text{ V}$ et de résistance interne $R_{eq} = 3,33 \Omega$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice ne présente aucune difficulté majeure. On retiendra que le générateur de Thévenin peut se déterminer en deux temps : on éteint l'ensemble des générateurs et on calcule la résistance équivalente du circuit ainsi simplifié ce qui nous donne la résistance de Thévenin ; on calcule ensuite la tension à vide du circuit (les générateurs étant allumés) qui est égale à la tension de Thévenin.

6. Transformons chacun des deux générateurs de tension en son dipôle équivalent de Norton puis regroupons les générateurs de courant d'une part (deux générateurs de courant en parallèle sont équivalents à un seul générateur de courant égal à la somme des deux courants) et les deux résistances d'autre part (figure 2.28).

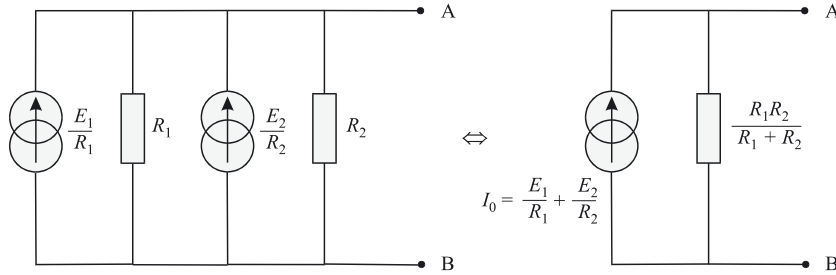


Figure 2.28

Nous avons obtenu le générateur équivalent de Norton du dipôle AB. La transformation Norton-Thévenin nous conduit à la figure 2.29.

Application numérique :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2,4 \Omega$$

$$E_0 = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2}$$

$$E_0 = \frac{(6 \times 10) + (4 \times 8)}{4 + 6} = 9,2 \text{ V}$$

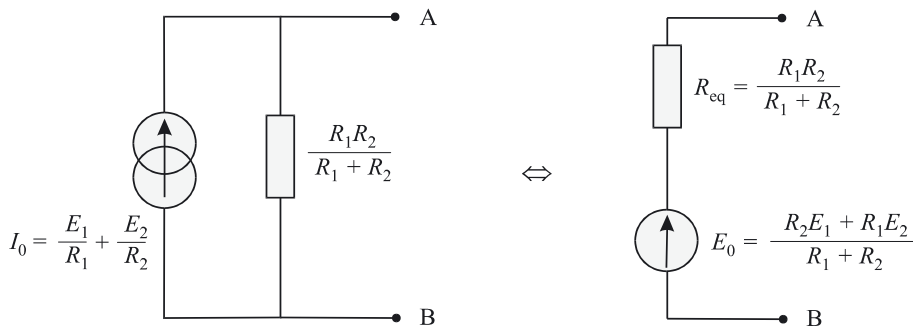


Figure 2.29

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La transformation Thévenin-Norton est un outil très performant : plusieurs transformations successives permettent d'obtenir très rapidement le générateur de Thévenin ou de Norton de pratiquement n'importe quel dipôle. Procéder de la sorte peut être plus rapide que de rechercher E_0 et R_{eq} d'après leur définition, comme nous l'avons fait dans l'exercice 2.5. Bien utilisés, les théorèmes de Thévenin et de Norton sont des moyens efficaces de résoudre des problèmes complexes d'électrocinétique.

7. Dans ce schéma, nous pouvons considérer que la résistance R_5 est alimentée par le dipôle AB. Nous allons rechercher le générateur de Thévenin équivalent à ce dipôle AB (autrement dit du

circuit démunie de sa résistance R_5), ce qui nous permettra de répondre facilement à la question. Dans ce dipôle AB, nous pouvons remplacer le générateur de tension E_1 et de résistance R_1 par un générateur de courant I_1 placé en parallèle avec une résistance R_1 (transformation Thévenin-Norton) :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = 1 \text{ A}$$

De même, le générateur de courant I_0 placé en parallèle avec la résistance R_3 est équivalent à un générateur parfait de tension E_0 en série avec cette même résistance R_3 . Avec :

$$E_0 = R_3 I_0 = 0,8 \text{ V}$$

Après ces deux transformations, le dipôle AB se présente comme indiqué sur la figure 2.30.

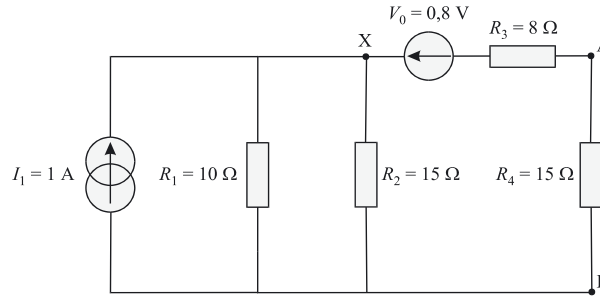


Figure 2.30

Les résistances R_1 et R_2 placées en parallèle forment une résistance équivalente R_0 telle que :

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6 \Omega$$

Le générateur de courant I_1 se trouve donc en parallèle avec cette résistance R_0 et est donc équivalent à un générateur de tension E_2 placé en série avec cette résistance R_0 (figure 2.31). On a :

$$E_2 = R_0 I_1 = 6 \text{ V}$$

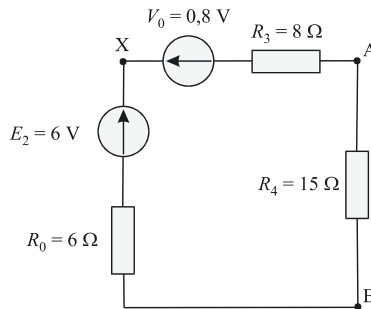


Figure 2.31

L'association série de R_0 , E_2 , V_0 et R_3 se simplifie de manière évidente en un générateur de tension $E_3 = 5,2 \text{ V}$ en série avec une résistance $R_6 = R_0 + R_3$ (figure 2.32).

Appliquons encore une fois la transformation Thévenin-Norton (figure 2.33).

Regroupons pour finir les deux résistances en parallèle et appliquons une dernière fois la transformation Norton-Thévenin (figure 2.34) de manière à obtenir le générateur de Thévenin équivalent du dipôle AB.

Alimentons la résistance R_5 de notre circuit de la figure 2.17 à l'aide de ce générateur équivalent (figure 2.35).

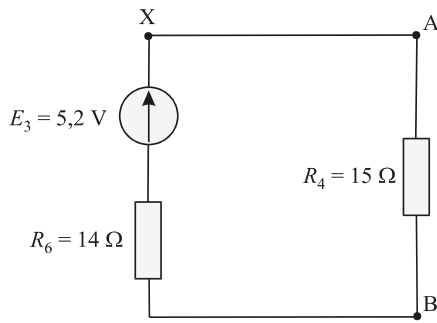


Figure 2.32

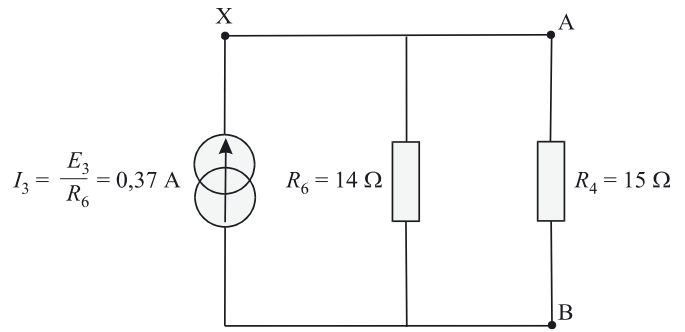


Figure 2.33

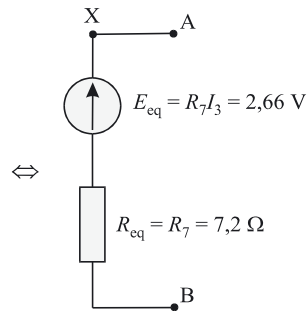
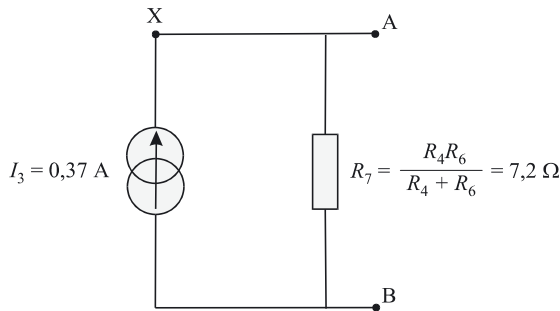


Figure 2.34

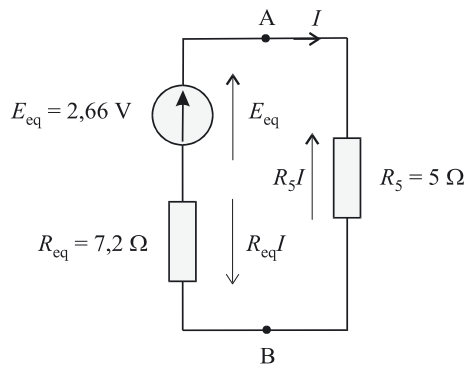


Figure 2.35

En appliquant la loi des mailles dans l'unique maille du circuit ainsi obtenu, on obtient (en prenant soin de respecter la convention récepteur pour les résistances) :

$$E_{eq} = R_{eq}I + R_5I$$

D'où l'on tire immédiatement :

$$I = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_5}$$

Soit :

$$I = \frac{2,66}{7,2 + 5} = 0,22 \text{ A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre que l'on peut résoudre des cas relativement complexes en ne faisant appel qu'aux théorèmes de Thévenin et de Norton. Cette technique permet d'éviter d'avoir à résoudre des équations multiples et de gagner énormément de temps en transformant pas à pas le circuit initial.

8. Notre circuit est formé de cinq dipôles placés en parallèle. Rien n'est changé à ce circuit si on effectue la légère transformation proposée sur la figure 2.36, qui consiste à considérer que la résistance R est alimentée par un dipôle AB. Nous allons rechercher le dipôle équivalent de Thévenin de ce dipôle AB afin de déterminer facilement le courant dans la résistance R .

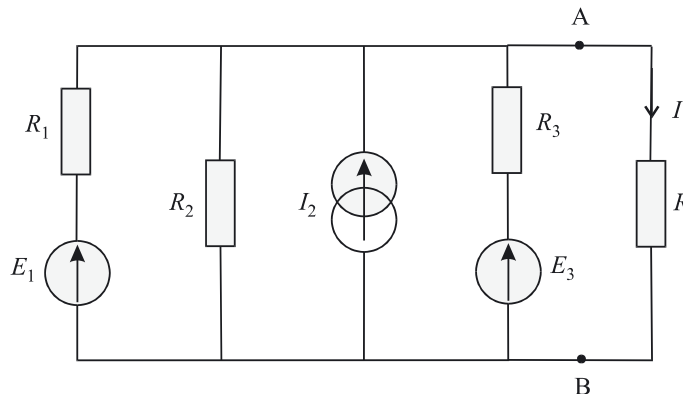


Figure 2.36

Transformons tout d'abord les deux générateurs de tension réels de ce dipôle AB en leurs générateurs équivalents de Norton respectifs, comme indiqué sur la figure 2.37.

Le dipôle AB ainsi transformé est équivalent à l'association parallèle de trois générateurs de courant et de trois résistances. Les trois générateurs de courant en parallèle sont équivalents à un seul générateur de courant d'intensité I_0 égal à la somme de ces trois courants. Quant à l'association parallèle des trois résistances, elle est évidemment équivalente à une résistance unique R_0 que nous calculons sans peine en utilisant les règles simples qui régissent les associations de résistances.

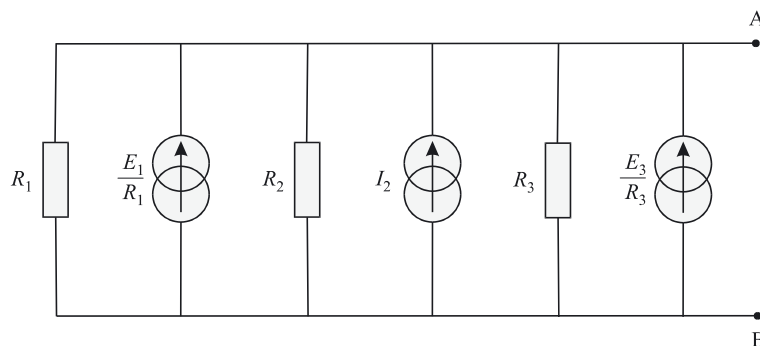


Figure 2.37

$$I_0 = \frac{E_1}{R_1} + I_2 + \frac{E_3}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1}{R_1 R_2 R_3}$$

Soit :

$$R_0 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1}$$

Le dipôle AB de la figure 2.37 est donc équivalent au dipôle représenté sur la figure 2.38.

Nous avons ainsi obtenu le générateur équivalent de Thévenin du dipôle AB, de résistance interne R_0 et de tension $E_{eq} = R_0 I_0$.

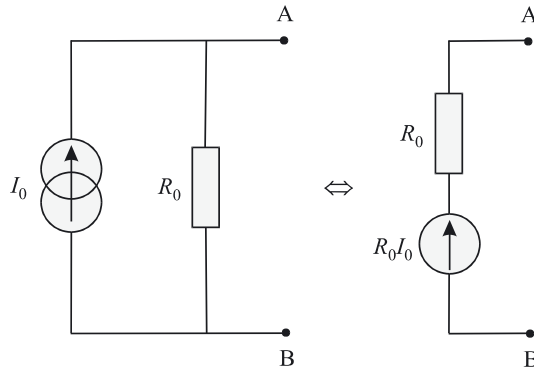


Figure 2.38

Le circuit initial se résume donc au schéma représenté sur la figure 2.39 d'où l'on tire immédiatement la valeur du courant.

Appliquons en effet la deuxième loi de Kirchhoff à l'unique maille du circuit :

$$E_{\text{eq}} - R_0 I - R I = 0$$

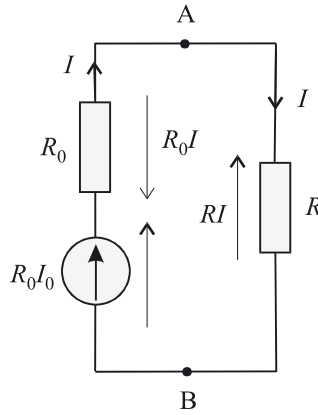


Figure 2.39

D'où :

$$I = \frac{E_{\text{eq}}}{R_0 + R} = \frac{R_0 I_0}{R_0 + R}$$

Soit :

$$I = \frac{\left(\frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1} \right) \left(\frac{E_1}{R_1} + I_2 + \frac{E_3}{R_3} \right)}{\frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1} + R}$$

Application numérique :

$$I_0 = \frac{10}{60} + 0,1 + \frac{7}{40} = 442 \text{ mA}$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1} = 19,35 \, \Omega$$

$$E_{\text{eq}} = 8,55 \text{ V}$$

D'où :
$$I = \frac{E_{eq}}{R_0 + R} = \frac{8,55}{19,35 + 30} = 173 \text{ mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On retiendra tout d'abord la petite astuce utilisée pour transformer le schéma (sans rien modifier au fonctionnement du circuit, bien évidemment). Par ailleurs, nous avons une fois de plus obtenu la preuve que les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent d'accéder rapidement et efficacement, avec peu de calculs lourds, à la détermination de n'importe quelle grandeur électrique au sein d'un circuit, même complexe.

9. 1. Appliquons le théorème de Millman au point A :

On a :
$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{0}{R_2} + \frac{V_B}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

2. Appliquons le théorème de Millman au point B :

On a :
$$V_B = \frac{\frac{V_A}{R_3}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$

2. Remplaçons l'expression de cette tension V_B dans l'expression de V_A :

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{V_A}{R_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{V_A}{R_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right)}$$

Regroupons les termes contenant V_A dans le même membre de cette équation, de manière à calculer facilement ce potentiel.

$$V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_A}{R_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right)} = \frac{E_1}{R_1}$$

$$V_A = \frac{E_1}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right)} \right)^{-1}$$

Soit :
$$V_A = 5,45 \text{ V}$$

D'où :
$$V_B = 1,8 \text{ V}$$

Par conséquent :

$$V_B - V_A = 5,45 - 1,8 = 3,65 \text{ V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans un circuit simple, le théorème de Millman, appliqué en deux points différents d'un circuit, permet de déterminer l'intensité du courant circulant entre ces deux points.

10. 1. En appliquant le théorème de Millman au point X, on obtient immédiatement :

$$V_X = \frac{\frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}$$

2. Calculons le courant I_A :

$$I_A = \frac{V_A - V_X}{R_A} = \frac{V_A \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \right) - \frac{V_A}{R_A} - \frac{V_B}{R_B} - \frac{V_C}{R_C}}{R_A \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \right)}$$

Soit, après simplification de cette expression :

$$I_A = \left(\frac{1}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A} \right) \left[(R_B + R_C) V_A - R_C V_B - R_B V_C \right]$$

En remarquant que la complète symétrie du circuit nous permet de permuter les indices, on obtient :

$$I_B = \left(\frac{1}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A} \right) \left[-R_C V_A + (R_C + R_A) V_B - R_A V_C \right]$$

$$I_C = \left(\frac{1}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A} \right) \left[-R_B V_A - R_A V_B + (R_A + R_B) V_C \right]$$

3. Exprimons que le courant I_A est la somme des courants dans R_3 et dans R_2 :

$$I_A = \frac{V_A - V_B}{R_3} + \frac{V_A - V_C}{R_2} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_A - \frac{V_B}{R_3} - \frac{V_C}{R_2}$$

On peut une fois de plus exploiter la symétrie du système et déduire les autres courants par simple permutation des indices :

$$I_B = -\frac{V_A}{R_3} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} \right) V_B - \frac{V_C}{R_1}$$

$$I_C = -\frac{V_A}{R_2} - \frac{V_B}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_C$$

On remarquera que la symétrie est effectivement parfaite compte tenu de l'appellation des résistances : ainsi R_1 est la résistance reliant B à C.

4. Les deux schémas doivent être équivalents quelles que soient les tensions V_A , V_B et V_C . On doit donc identifier les deux jeux d'équations donnant les expressions des courants I_A , I_B et I_C dans les deux schémas, c'est-à-dire identifier les coefficients des tensions deux à deux.

On obtient ainsi, notamment :

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

Il y a théoriquement neuf coefficients à identifier. Trois d'entre eux suffisent pour obtenir ce résultat. Les autres identifications sont cohérentes avec ces valeurs.

On peut également exprimer les résistances R_A , R_B et R_C en fonction des résistances R_1 , R_2 et R_3 . On obtient alors les relations :

$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

5. Il sera très facile de calculer le courant I en connaissant la résistance équivalente du réseau. Soit R_{eq} cette résistance équivalente. Dans le circuit, on repère immédiatement une association de R_2 , R_4 et R_5 en triangle. Cette association est équivalente à une étoile et le circuit de la figure 2.18 est donc équivalent au circuit de la figure 2.40.

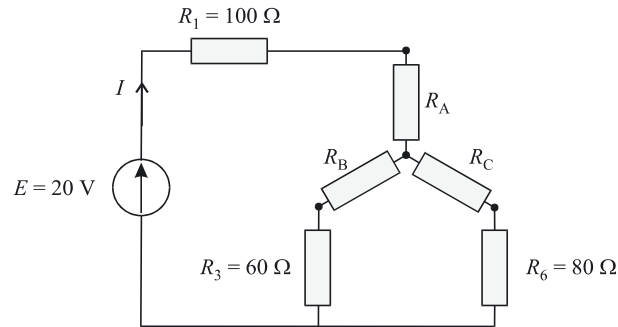


Figure 2.40

En appliquant les règles de la transformation triangle étoile, on obtient :

$$R_A = \frac{R_5 R_2}{R_2 + R_4 + R_5} = 5,6 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_4 R_2}{R_2 + R_4 + R_5} = 3,3 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 16,7 \Omega$$

Dans ce nouveau circuit, R_B et R_3 sont en série et forment une résistance équivalente de $63,3 \Omega$. Par ailleurs, R_C et R_6 forment une résistance équivalente de $96,7 \Omega$. Ces deux résistances de $63,3 \Omega$ et de $96,7 \Omega$ sont en parallèle et forment donc une résistance équivalente r telle que :

$$r = \frac{63,3 \times 96,7}{63,3 + 96,7} = 38,3 \Omega$$

Cette résistance r se trouve finalement en série avec R_A et R_1 :

$$R_{eq} = R_1 + R_A + r = 100 + 5,6 + 38,3 = 143,9 \Omega$$

D'où :

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{20}{143,9} = 139 \text{ mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Les deux séries d'équations qui permettent de transformer une configuration étoile en triangle et réciproquement correspondent au **théorème de Kennelly**. Grâce à elles, on peut notamment transformer certains circuits de manière à calculer rapidement leur résistance équivalente, comme cela est montré à la question 5.

11. Considérons que la résistance R est alimentée par un dipôle AB constitué du reste du circuit et calculons le générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle (figure 2.41).

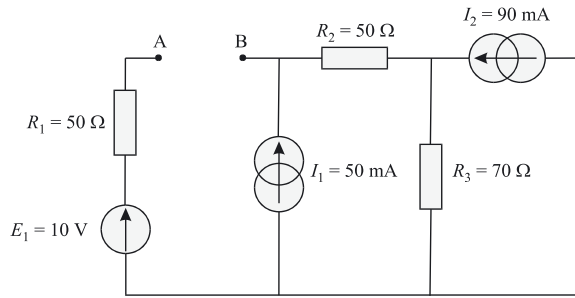


Figure 2.41

Organisons le schéma de manière à rendre plus visibles les transformations nécessaires (figure 2.42). Nous remarquons immédiatement que le générateur de courant I_2 est en parallèle avec la résistance R_3 . Cette association est donc équivalente à un générateur de tension parfait $R_3 I_2$ placé en série avec cette même résistance R_3 (figure 2.43). Les deux résistances R_2 et R_3 étant en série, remplaçons-les par leur résistance équivalente $R_{23} = R_2 + R_3 = 120 \Omega$ (figure 2.44).

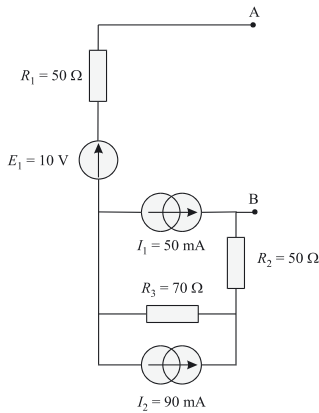


Figure 2.42

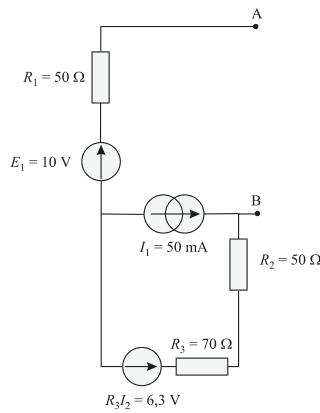


Figure 2.43

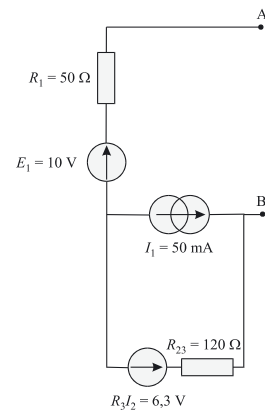


Figure 2.44

Retransformons le générateur de Thévenin constitué de la source de tension parfaite $R_3 I_2$ et de la résistance série R_{23} en un générateur de Norton (figure 2.45). Cela nous permet d'associer les deux générateurs de courant en un seul de courant I_0 (figure 2.46).

A.N. :
$$I_0 = I_1 + \frac{R_3 I_2}{R_{23}} = 50 \times 10^{-3} + \frac{6,3}{120} = 102,5 \text{ mA}$$

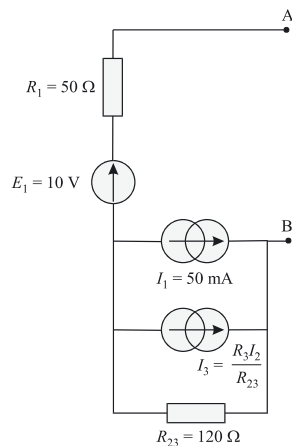


Figure 2.45

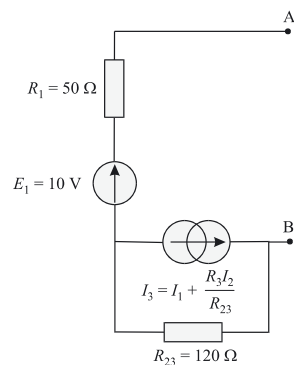


Figure 2.46

Ce générateur de courant en parallèle avec la résistance R_{23} peut être transformé en son générateur de Thévenin équivalent (figure 2.47), autrement dit par un générateur de tension parfait E_0 en série avec cette même résistance R_{23} .

$$E_0 = R_{23}I_0 = 120 \times 102,5 \times 10^{-3} = 12,3 \text{ V}$$

Le dipôle AB se résume donc à l'association série de deux générateurs de tension parfaits et de deux résistances. Il est donc équivalent à un seul générateur de tension E_{eq} égale à la somme algébrique des deux tensions E_0 et E muni d'une résistance série R_{eq} .

Nous parlons bien ici de somme algébrique. Les deux générateurs ne sont pas placés dans le même sens. Le générateur équivalent possédera donc une tension équivalente égale à la différence des deux.

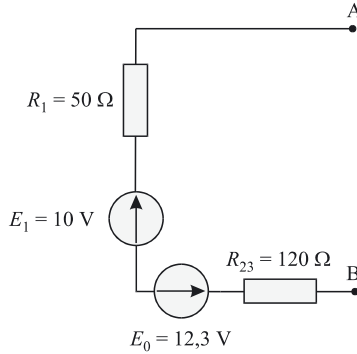


Figure 2.47

Nous avons donc bien obtenu le générateur équivalent de Thévenin du dipôle AB (figure 2.48), avec :

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = 170 \Omega$$

$$E_{eq} = E - E_0 = -2,3 \text{ V}$$

On fera particulièrement attention au signe de la tension E_{eq} , qui, orientée comme indiqué sur la figure 2.49, correspond bien à $E - E_0$, les deux sources étant orientées différemment.

Le circuit initial est donc équivalent à ce générateur de Thévenin alimentant la résistance R (figure 2.49).

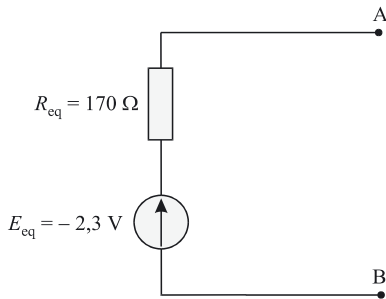


Figure 2.48

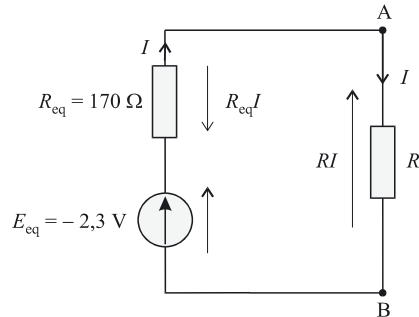


Figure 2.49

Plaçons les différentes tensions aux bornes de chaque dipôle et écrivons la loi des mailles dans ce circuit.

On obtient :

$$E_{eq} - R_{eq}I - RI = 0$$

Soit :

$$I = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R} = \frac{-2,3}{170 + 80} = -9,2 \text{ mA}$$

Lors de la dernière étape qui consiste à calculer le courant dans la résistance R , on veillera à respecter le sens du courant proposé dans l'énoncé. Ici, de A vers B. C'est dans ce sens que le courant est négatif. On peut l'orienter dans l'autre sens en le comptant positivement.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Comme cela a déjà été mis en évidence dans la série d'exercices proposés, nous avons ici une preuve éloquente de la puissance des théorèmes de Thévenin et de Norton. Dès lors qu'il s'agit de déterminer une différence de potentiels ou un courant dans un circuit complexe, il est toujours recommandé de faire appel à ces outils.

Condensateurs

Exercices

1. On charge un condensateur de $400\ \mu\text{F}$ sous $500\ \text{V}$. Calculer la charge Q prise par chacune des armatures et l'énergie emmagasinée par le condensateur.

2. Calculer la capacité équivalente de l'ensemble de condensateurs de la Figure 65. Quelle est la charge prise par chaque condensateur ? Quelle est la d.d.p. aux bornes de chacun ?

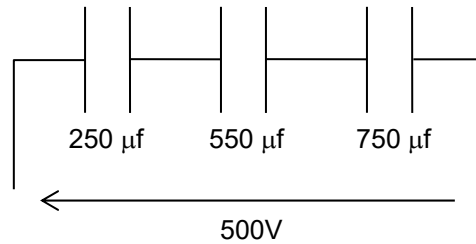


Figure 65

3. On charge un condensateur de $2\ \mu\text{F}$ sous $1000\ \text{V}$. On l'associe en parallèle à un condensateur de $0,5\ \mu\text{F}$, initialement déchargé, en basculant le commutateur K . Calculer la charge totale du système et la d.d.p. qui apparaît aux bornes des condensateurs. Calculer l'énergie emmagasinée par chaque condensateur et la perte d'énergie due au regroupement.

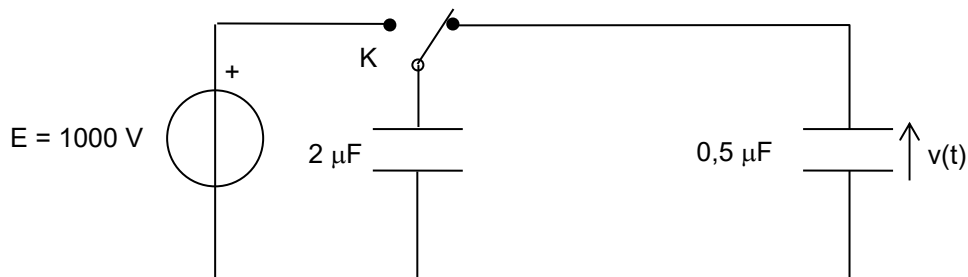


Figure 66

4. Calculer la capacité équivalente au groupement de condensateurs de la Figure 67.

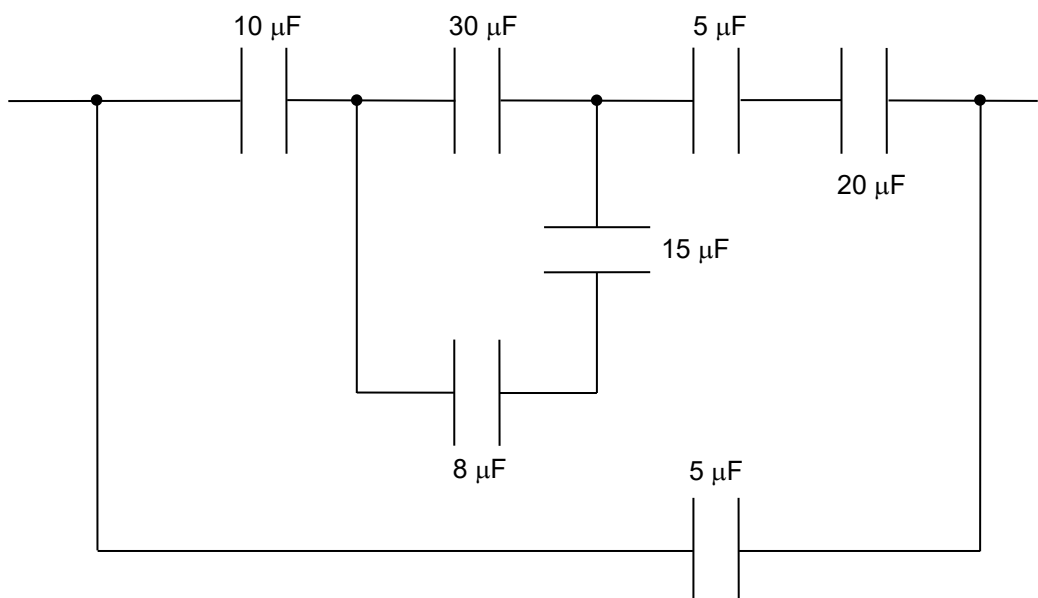


Figure 67

5. Calculer la capacité équivalente au groupement de condensateurs de la Figure 68.

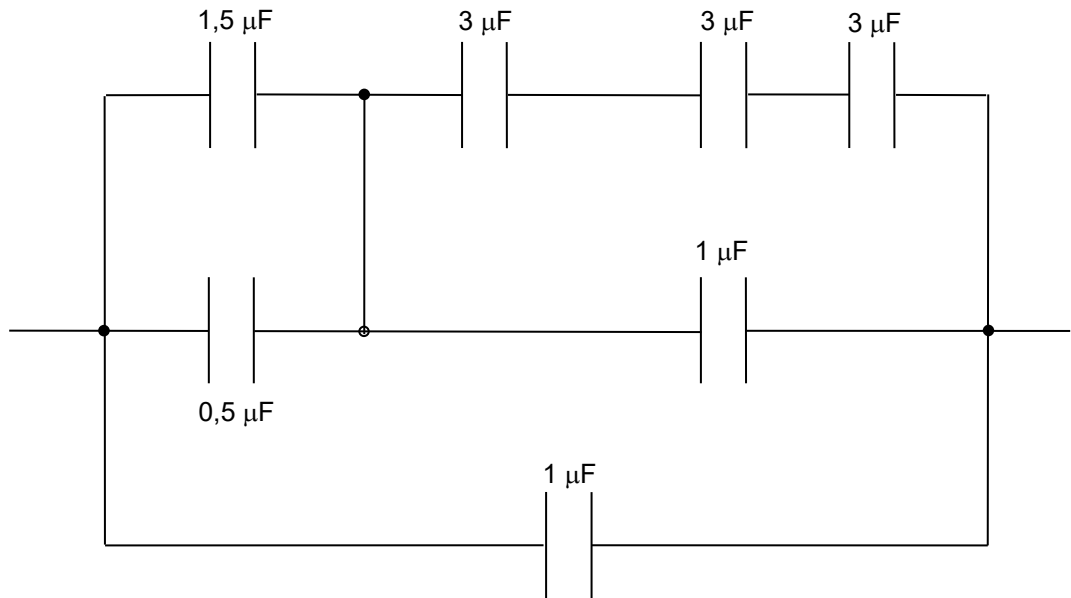


Figure 68

6. Un condensateur est utilisé dans un petit automate programmable alimenté en 24 VDC pour le rendre insensible à des brèves coupures d'alimentation.

La consommation de l'automate est de 200 mA. Le cahier des charges précise qu'une coupure d'alimentation durant 200 ms ne doit pas perturber le fonctionnement.

Admettant qu'une baisse momentanée de tension de 2 V est acceptable, quelle est la capacité minimum requise pour ce condensateur ?

Suggestion : Considérer l'automate comme un récepteur de courant idéal

7. Calculer la tension v en fonction de E , C_1 et C_2 .

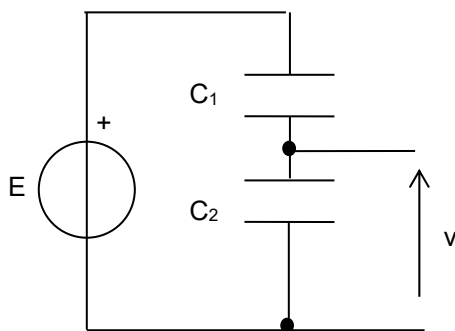


Figure 69

8. Le circuit de la Figure est en régime permanent. À l'instant $t = t_0$, on bascule le commutateur K.

À l'instant $t_1 > t_0 + 5RC$, on rebascule le commutateur.

Tracer l'allure de l'évolution de $v(t)$ à partir de $t = t_0$.

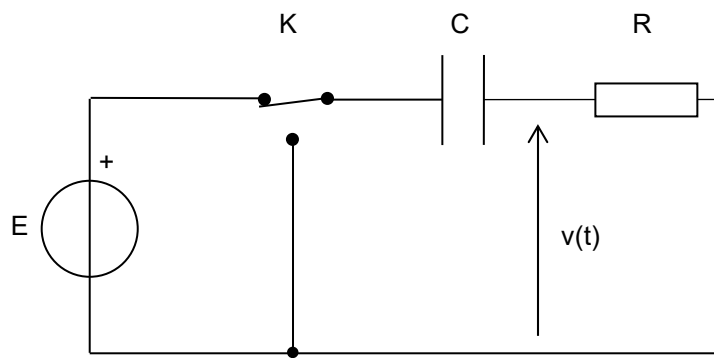


Figure 75

Solutions

1. La charge est égale à $Q = C \cdot V = 400 \cdot 10^{-6} \times 500 = 200 \text{ mC}$.

L'énergie emmagasinée est $W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = 0,5 \times 200 \cdot 10^{-3} \times 500 = 50 \text{ J}$.

2. Les trois condensateurs sont en série, on a donc :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{250 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{550 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{750 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq} = 139,83 \mu F$$

Chaque condensateur acquiert la d.d.p. : $V_i = \frac{C_{eq}}{C_i} V$,

$$\text{Soit : } V_1 = \frac{C_{eq}}{C_1} V = \frac{139,83 \cdot 10^{-6}}{250 \cdot 10^{-6}} \times 500 = 279,66 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{C_{eq}}{C_2} V = \frac{139,83 \cdot 10^{-6}}{550 \cdot 10^{-6}} \times 500 = 127,12 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{C_{eq}}{C_3} V = \frac{139,83 \cdot 10^{-6}}{750 \cdot 10^{-6}} \times 500 = 93,22 \text{ V}$$

3. Le condensateur de $2 \mu F$ que l'on charge sous 1000 V prend une charge de $Q = CV = 2 \cdot 10^{-6} \times 1000 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$.

Cette charge se conserve lorsque l'on relie le condensateur de $2 \mu F$ à celui de $0,5 \mu F$. Le condensateur équivalent à l'association en parallèle des deux condensateurs possède une capacité de $2 + 0,5 = 2,5 \mu F$. La d.d.p. qui régnera aux bornes de ce condensateur sera de

$$Q = C_{eq} V' \Rightarrow V' = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 800 \text{ V}.$$

Avant qu'on l'ait relié le condensateur de $2 \mu F$ au condensateur de $0,5 \mu F$, l'énergie emmagasinée par le condensateur de $2 \mu F$ est : $W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-6} \times 1000^2 = 1 \text{ J}$.

L'énergie emmagasinée par le condensateur de $2\text{ }\mu\text{F}$ après qu'on l'ait relié au condensateur de $0,5\text{ }\mu\text{F}$ est : $W = \frac{1}{2}CV'^2 = \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-6} \times 800^2 = 640 \cdot 10^{-3}\text{ J}$.

L'énergie emmagasinée par le condensateur de $0,5\text{ }\mu\text{F}$ après qu'on l'ait relié au condensateur de $2\text{ }\mu\text{F}$ est : $W = \frac{1}{2}CV'^2 = \frac{1}{2} \times 0,5 \cdot 10^{-6} \times 800^2 = 160 \cdot 10^{-3}\text{ J}$.

La différence : $1 - (640 \cdot 10^{-3} + 160 \cdot 10^{-3}) = 200 \cdot 10^{-3}\text{ J}$ s'est dissipée par effet Joule dans les fils du circuit et dans les armatures et un peu par rayonnement électromagnétique.

Pour bien voir ce qui se passe dans cet exercice, il est intéressant de considérer l'analogie suivante :

Le condensateur de $2\mu\text{F}$ peut être assimilé à un réservoir de gaz comprimé d'un volume $2.V_0$ rempli de gaz sous la pression $1000.P_0$. La masse de gaz sous pression représente la charge électrique du condensateur de capacité $2\mu\text{F}$. On relie ce réservoir à un autre réservoir, initialement vide, de volume $0,5.V_0$ par un tuyau. On visualise bien qu'en l'absence de fuite, la masse de gaz (la charge) demeure inchangée. On "sent" également que le gaz ayant plus de volume à occuper, sa pression (la d.d.p. aux bornes des condensateurs) va diminuer et sera inférieure à $1000.P_0$.

4. On s'occupe d'abord de la branche du haut dans laquelle on remplace par un condensateur équivalent les condensateurs de 5 et $20\text{ }\mu\text{F}$ en série sur la partie droite et les condensateurs de 8 et $15\text{ }\mu\text{F}$ qui sont en parallèle à celui de $30\text{ }\mu\text{F}$. On obtient les condensateurs équivalents :

$$\frac{1}{C'_{eq}} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{15 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C'_{eq} = 5,21\text{ }\mu\text{F} \text{ et } \frac{1}{C''_{eq}} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C''_{eq} = 4\text{ }\mu\text{F}$$

On obtient donc la Figure 70 :

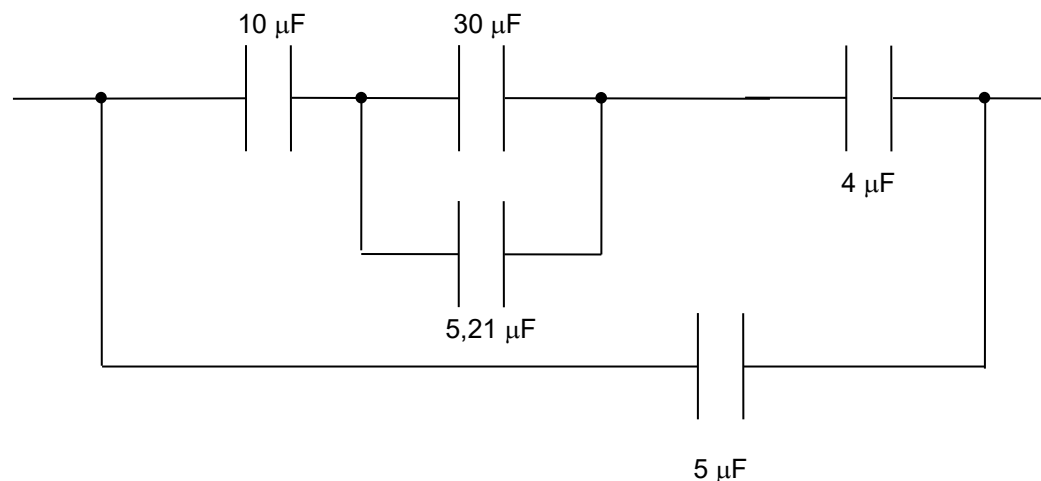


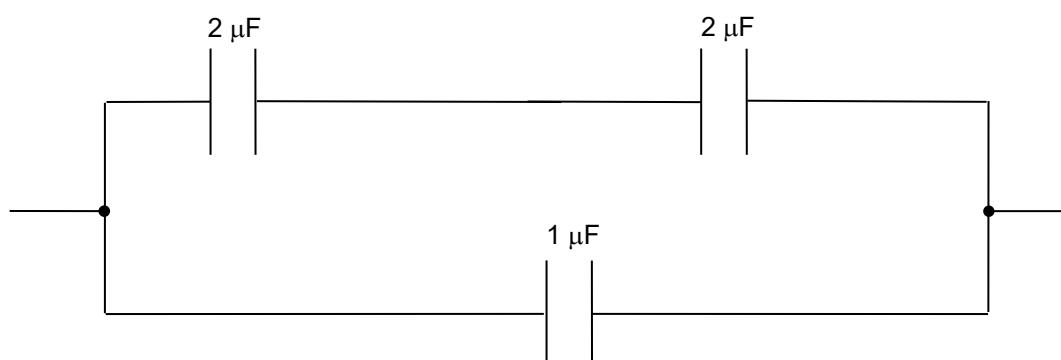
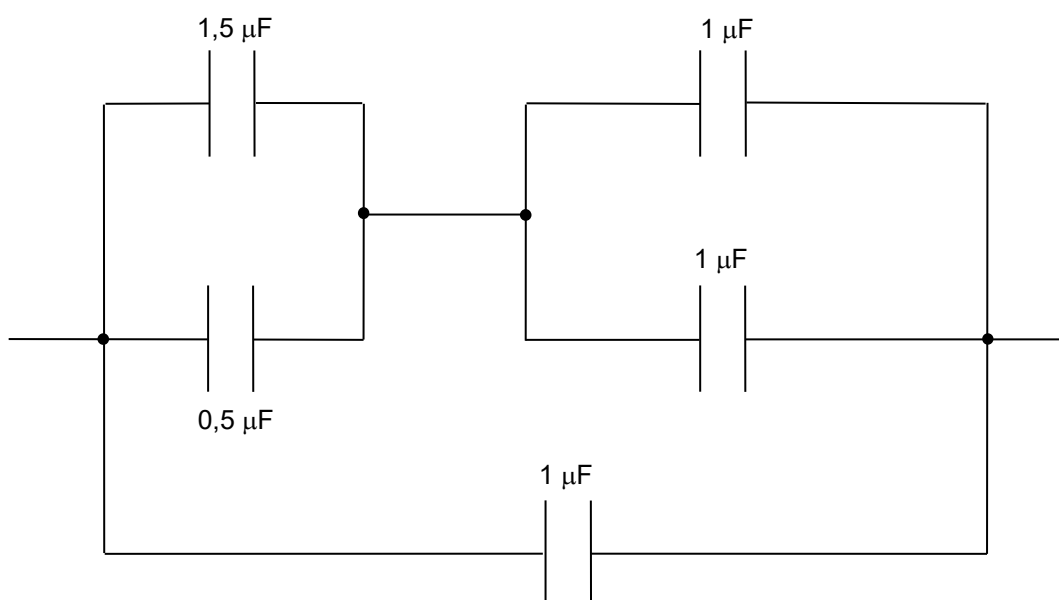
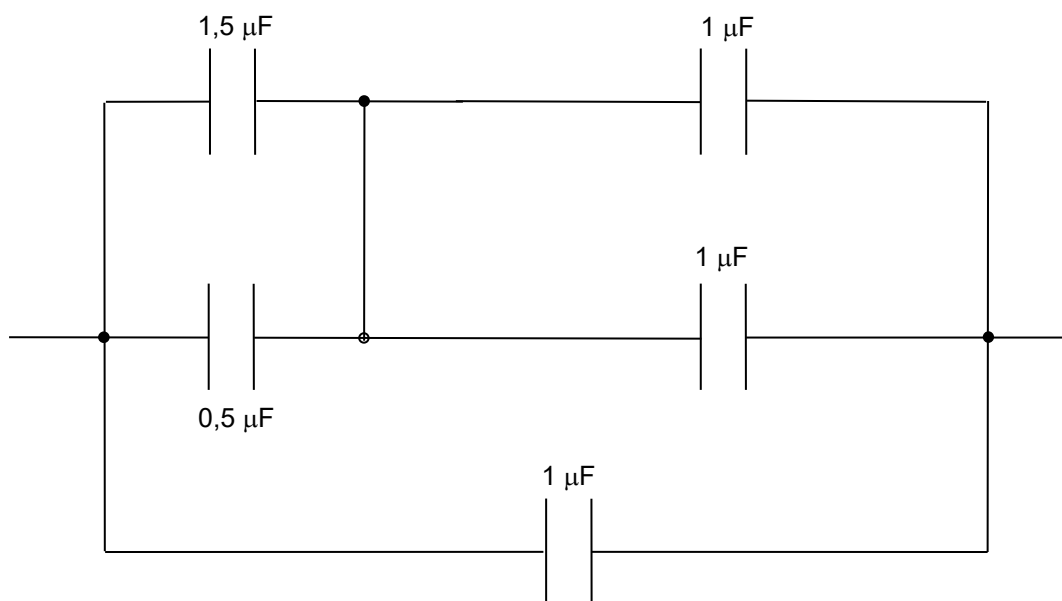
Figure 70

Ensuite on remplace les condensateurs de 30 et $5,21\text{ }\mu\text{F}$ qui sont en parallèle par un condensateur équivalent de $35,21\text{ }\mu\text{F}$. Puis les 3 condensateurs en série de 10 , $35,21$ et $4\text{ }\mu\text{F}$ par un condensateur de $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{35,21 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq} = 2,64\text{ }\mu\text{F}$.

Finalement, il ne reste plus qu'à remplacer les deux condensateurs en parallèle ($2,64$ et $5\text{ }\mu\text{F}$) par un condensateur de capacité $2,64 + 5 = 7,64\text{ }\mu\text{F}$.

La capacité équivalente est donc de $7,64\text{ }\mu\text{F}$.

5. Une démarche identique conduit aux schémas suivants :



Le circuit se réduit alors à 2 condensateurs de $1 \mu\text{F}$ en parallèle, soit un condensateur équivalent de $2 \mu\text{F}$.

$$6. q = Cv \Rightarrow \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow C = \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{i}{\frac{dv}{dt}} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{\frac{2}{200 \cdot 10^{-3}}} = 20 \text{ mF}$$

$$7. v = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times E$$

8. La charge q d'une armature ne peut pas changer instantanément, il lui faut un temps de l'ordre de RC pour se modifier notablement. Ainsi, à $t = t_0 + dt$, la charge du condensateur est toujours

$$q = Cv = CE.$$

En basculant le commutateur, on fait passer le potentiel de l'armature de gauche du potentiel E à 0 .

La charge se conservant sur un très petit intervalle de temps, on a :

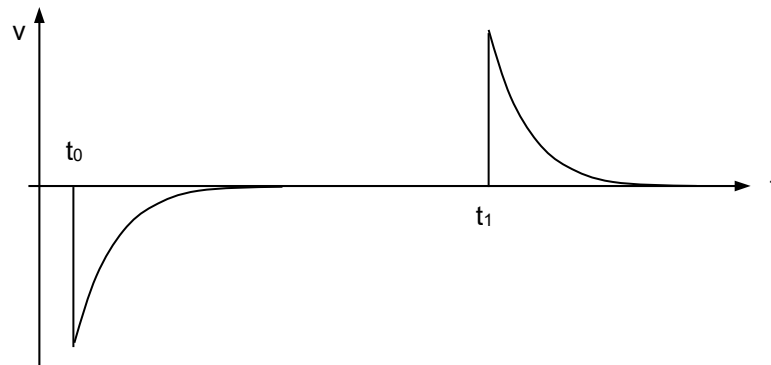
$$q = \text{constante} = C(V_{\text{gauche } t_0 - dt} - V_{\text{droite } t_0 - dt}) = C(V_{\text{gauche } t_0 + dt} - V_{\text{droite } t_0 + dt})$$

$$\text{D'où : } (E - 0) = (0 - V_{\text{droite } t_0 + dt}) \Rightarrow V_{\text{droite } t_0 + dt} = -E$$

L'armature de gauche subit une brusque variation de potentiel de $-E$, le potentiel de l'armature de droite varie instantanément de la même quantité $-E$.

Ensuite, le condensateur se déchargeant, le potentiel de l'armature de droite va évoluer vers 0 de manière exponentielle.

Lorsque l'on rebascule le commutateur, l'armature de gauche voit son potentiel passer de 0 à $+E$, l'armature de droite fait de même. Puis le potentiel de l'armature de droite redescend à 0 au fur et à mesure que le condensateur se charge. Au bout de $5RC$, le potentiel de l'armature de droite vaut à nouveau 0 .



Exercices

1. Charge d'un condensateur au travers d'une résistance *

Dans le circuit représenté sur la figure 4.4, on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'expression de la tension $u(t)$ et tracer son graphe. Le condensateur est supposé déchargé au moment où se produit la fermeture de l'interrupteur. Déterminer et tracer ensuite le courant $i(t)$.

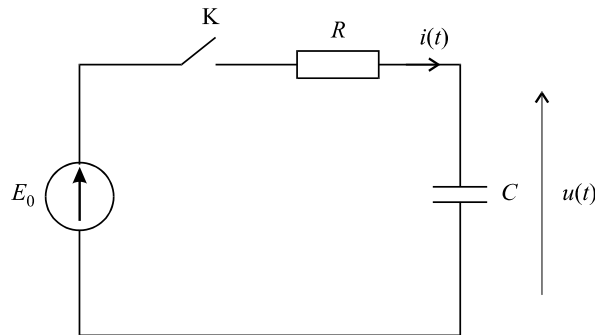


Figure 4.4

Conseil méthodologique

L'équation différentielle qui régit le fonctionnement du circuit s'obtient facilement en écrivant la loi des mailles. Il est conseillé de transformer cette équation en une équation différentielle dont la solution est la tension $u(t)$.

2. Décharge d'un condensateur dans une résistance **

Dans le circuit représenté sur la figure 4.5, le condensateur est initialement chargé et présente à ses bornes une tension $U_0 = 5 \text{ V}$.

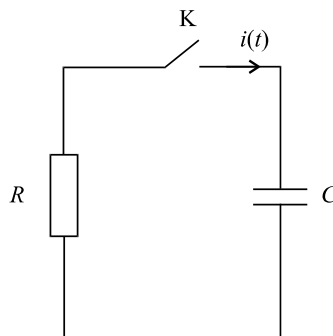


Figure 4.5

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Déterminer l'expression du courant $i(t)$ dans le circuit.

Conseil méthodologique

Ici encore, c'est la loi des mailles qui permet d'établir l'équation différentielle de fonctionnement du circuit. Pour obtenir la solution de cette équation, il convient de raisonner sur les conditions initiales du problème et notamment sur la valeur du courant à l'instant $t = 0_+$. Bien faire attention aux signes des grandeurs électriques.

3. Régime transitoire dans un circuit comportant un condensateur et deux résistances *

Dans le circuit représenté sur la figure 4.6, on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'expression de $u(t)$ et tracer son graphe. Le condensateur est supposé déchargé au moment où on ferme l'interrupteur.

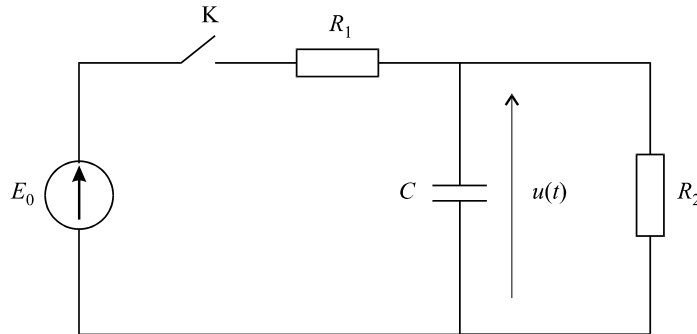


Figure 4.6

Conseil méthodologique

L'équation différentielle qui permet de déterminer la tension $u(t)$ s'obtient ici en plusieurs étapes. Il est conseillé de nommer et placer les différents courants dans le circuit, d'établir les différentes équations caractéristiques de chaque dipôle, puis d'éliminer les courants dans ces différentes équations.

4. Charge et décharge d'un condensateur en parallèle avec une résistance **

Dans le circuit représenté sur la figure 4.7, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. On ouvre à nouveau l'interrupteur à l'instant $t = 5$ s. Tracer les variations du courant $i(t)$.

Le condensateur est initialement déchargé.

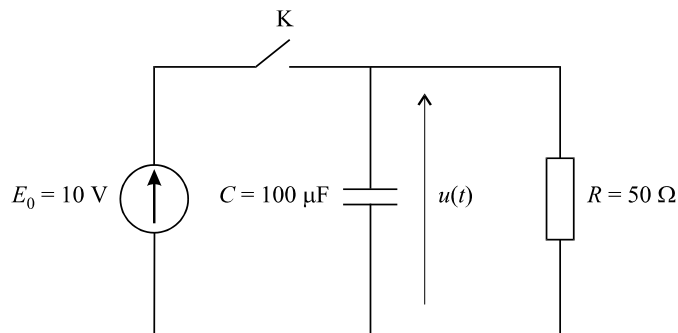


Figure 4.7

Conseil méthodologique

Raisonnement physiquement sur ce qui se passe à la fermeture de l'interrupteur pour déterminer correctement les conditions initiales du problème qui seront nécessaires au calcul du courant dans la seconde partie de l'exercice.

5. Charge et décharge d'un condensateur dans deux branches différentes d'un circuit **

Dans le circuit représenté sur la figure 4.8, le commutateur se trouve initialement dans la position B et le condensateur est déchargé.

À l'instant $t = 0$, on bascule le commutateur dans la position A. Au bout de 10 s, on le bascule sur la position C.

Tracer l'évolution de la tension $u(t)$.

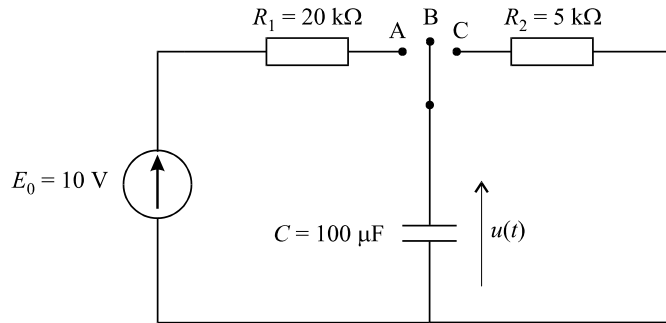


Figure 4.8

Conseil méthodologique

L'exercice est à résoudre en deux temps, avec deux types de conditions initiales différents. Dans la première partie, on pourra considérer qu'au bout des 10 s, le régime permanent est atteint.

6. Interruption d'un régime transitoire ***

On reprend le schéma de la figure 4.8 et l'énoncé de l'exercice 4.5, mais on bascule le commutateur sur C à l'instant $t = 3$ s. Tracer l'évolution de la tension $u(t)$.

Conseil méthodologique

L'exercice est toujours à résoudre en deux temps, avec deux types de conditions initiales différents. Compte tenu de l'instant de basculement du commutateur, il n'est plus possible de considérer que le régime permanent est atteint. Il est donc nécessaire de calculer la valeur de la tension au bout de $t = 3$ s.

7. Étude d'un circuit oscillant **

Dans le circuit de la figure 4.9, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Déterminer les variations de $u(t)$. Le condensateur est initialement déchargé.

Conseil méthodologique

La mise en équation du problème conduit à une équation différentielle du second ordre. Une fois de plus, il convient de raisonner sur les conditions initiales pour déterminer la solution de cette équation.

Conseil méthodologique

La première partie ne pose pas de difficulté majeure. L'écriture de la loi des mailles conduit à une équation du second ordre. La valeur du coefficient d'amortissement permet de déterminer le

Réponses

1. Tant que l'interrupteur reste fermé ($t = 0$), on a $u(t) = 0$ puisque le condensateur est déchargé. Écrivons la loi des mailles dans l'unique maille du circuit, une fois l'interrupteur fermé :

$$E_0 = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt \quad (4.1)$$

On a par ailleurs :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt \quad (4.2)$$

En dérivant cette dernière équation, on obtient :

$$C \frac{du}{dt} = i(t) \quad (4.3)$$

En utilisant les expressions (4.2) et (4.3), l'équation (4.1) devient :

$$E_0 = RC \frac{du}{dt} + u(t) \quad (4.4)$$

Cette équation différentielle admet pour solution :

$$u(t) = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Traçons $u(t)$ (figure 4.12) :

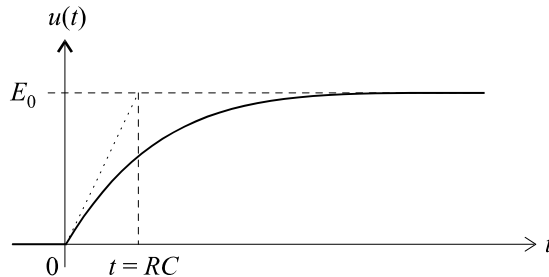


Figure 4.12

On remarquera que la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = RC$, RC représentant la constante de temps du circuit.

Le courant $i(t)$ se détermine facilement grâce à la relation (4.3) :

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -CE_0 \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{t}{RC}} \right) = (-CE_0) \cdot \left(-\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \right) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

La figure 4.13 présente le graphe de $i(t)$.

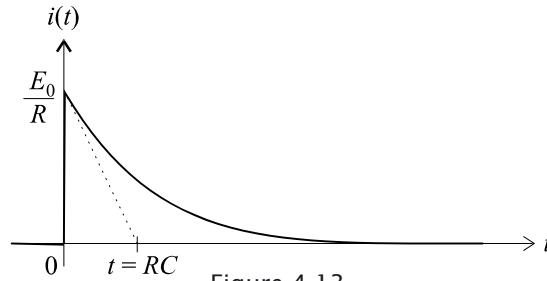


Figure 4.13

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : À la fois simple et très classique, cet exercice permet de se familiariser avec la méthode de résolution des régimes transitoires. La première étape consiste à établir l'équation différentielle dont la solution est la grandeur électrique que l'on recherche. La seconde consiste à résoudre l'équation ce qui, ici, ne pose aucune difficulté.

2. À la fermeture du circuit, la loi des mailles nous donne :

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = 0$$

En dérivant terme à terme, on obtient :

$$i(t) + RC \frac{di}{dt} = 0$$

La solution de cette équation est :

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Pour déterminer la constante k , il nous faut considérer la condition aux limites $t = 0$: à cet instant, une tension U_0 est brusquement appliquée aux bornes de R . Un courant $-\frac{U_0}{R}$ apparaît donc instantanément dans le circuit.

L'orientation de i par rapport à la tension aux bornes de R nous impose la présence de ce signe moins.

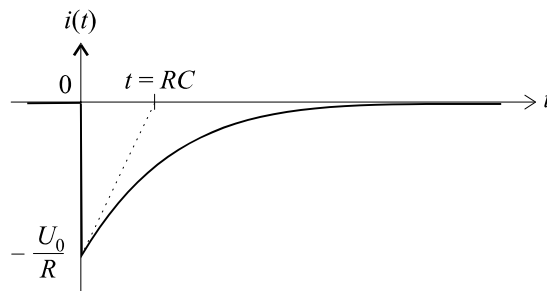


Figure 4.14

On a donc :

$$i(0) = k = -\frac{U_0}{R}$$

D'où :

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Le tracé de $i(t)$ est représenté sur la figure 4.14.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans cet exercice, la solution de l'équation différentielle fait intervenir une constante k qu'il faut déterminer avec soin. La connaissance de la valeur du courant à un instant donné permet de calculer cette constante. En règle générale, c'est la valeur initiale du courant qui est la plus simple à invoquer. Un raisonnement physique simple permet de le faire sans peine.

3. Plaçons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 4.15).

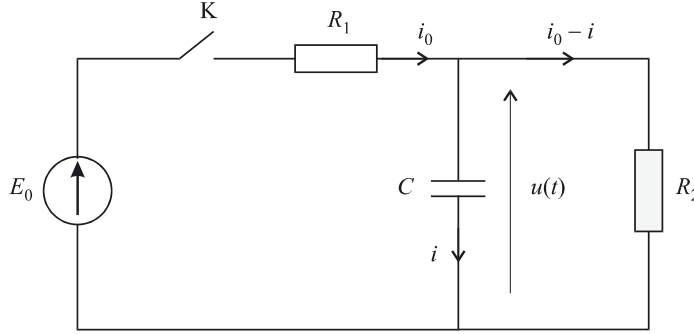


Figure 4.15

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Comme on peut s'en rendre compte dans le schéma de la figure 4.15, on fait l'économie d'une variable en écrivant directement $i_0 - i$ dans la branche contenant R_2 . Par ailleurs, il est courant d'alléger l'écriture en écrivant par exemple i_0 au lieu de $i_0(t)$. Il ne faut toutefois jamais oublier que ce courant est bien variable. Son écriture en minuscule nous le rappelle.

Comme nous avons trois inconnues i_0 , i et $u(t)$, nous devons impérativement écrire trois équations. On a évidemment :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (4.5)$$

La loi d'Ohm exprimée aux bornes des deux résistances nous fournit les deux autres équations :

$$u(t) = R_2(i_0 - i) \quad (4.6)$$

La tension aux bornes de R_1 est égale à $E_0 - v_A$, v_A étant le potentiel au point A. Or $v_A = u(t)$.

$$\text{On a donc :} \quad E_0 - u(t) = R_1 i_0 \quad (4.7)$$

Il faut bien veiller à respecter la convention récepteur dans l'écriture de la loi d'Ohm. Ne pas oublier que v_A est variable au cours du temps même si l'on n'a pas écrit $v_A(t)$.

Grâce aux équations (4.5) et (4.7), nous tirons les expressions de i et de i_0 en fonction de $u(t)$:

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ et } i_0 = \frac{E_0 - u(t)}{R_1}$$

que nous remplaçons dans l'équation (4.6) pour obtenir l'équation différentielle dont $u(t)$ est solution :

$$u(t) = R_2 \left(\frac{E_0 - u(t)}{R_1} - C \frac{du}{dt} \right)$$

$$\text{Soit :} \quad R_2 C \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) u(t) = \frac{R_2}{R_1} E_0$$

Mettons cette équation sous la forme $u(t) + T \frac{du}{dt} = k$:

$$u(t) + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \frac{du}{dt} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_0$$

Ce qui donne :

$$u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_0 (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad \text{avec} \quad T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

Le tracé de $u(t)$ est représenté sur la figure 4.16.

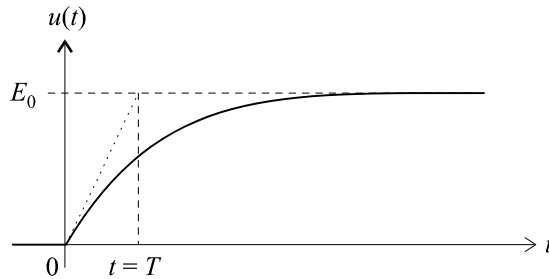


Figure 4.16

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Un peu plus complexe que les deux précédents, cet exercice montre que l'équation différentielle de fonctionnement du circuit n'est pas toujours immédiate. Il faut, pour l'obtenir, invoquer les lois élémentaires caractéristiques des différents dipôles impliqués et chercher à exprimer l'ensemble des grandeurs électriques en fonction de celle que l'on recherche.

4. À la fermeture de l'interrupteur, on applique brusquement une tension E_0 aux bornes de C : il se charge donc instantanément. De même, on applique cette tension E_0 dès la fermeture de K , aux bornes de R . Donc, à partir de $t = 0$, et tant que l'interrupteur reste fermé, on a :

$$i(t) = C^{te} = \frac{E_0}{R}$$

Lorsque l'on ouvre l'interrupteur à $t = 5 \text{ st} = 5 \text{ s}$, le circuit devient équivalent au circuit représenté sur la figure 4.17, le condensateur C étant chargé et présentant à ses bornes une tension de 10 V.

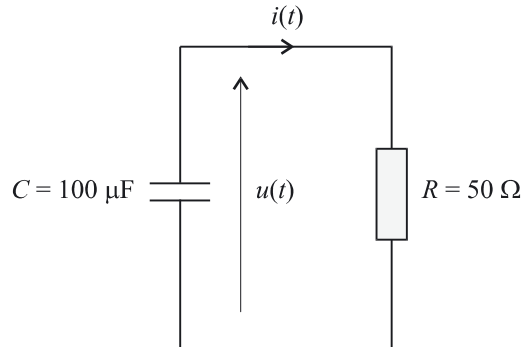


Figure 4.17

Pour plus de commodités, considérons cet instant d'ouverture de l'interrupteur comme la nouvelle origine des temps.

Écrivons les équations (très simples) de ce circuit :

$$u(t) = -\frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow i(t) = -C \frac{du}{dt}$$

Le respect de la convention récepteur introduit un signe moins dans l'expression de $u(t)$.

De même :

$$u(t) = Ri(t)$$

Remplaçons $i(t)$ dans cette équation :

$$u(t) + RC \frac{du}{dt} = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$u(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$k = u(0) = E_0 = 10 \text{ V}$ puisque le condensateur est chargé et qu'il présente à ses bornes une tension initiale égale à E_0 .

On tire donc :

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Ne pas oublier que cette expression n'est valable qu'en changeant l'origine des temps. En considérant que l'ouverture de l'interrupteur a lieu en réalité à $t = 5 \text{ s}$, on a en réalité :

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{(t-5)}{RC}}$$

La figure 4.18 résume l'ensemble du fonctionnement du circuit.

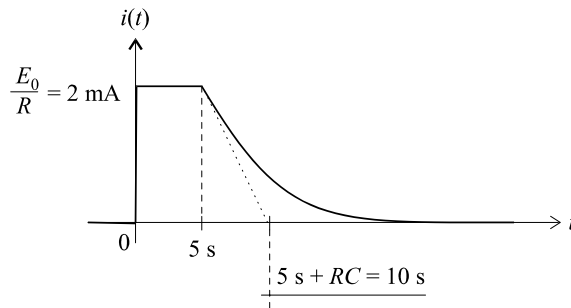


Figure 4.18

Lorsque l'on trace une courbe exponentielle décroissante, il est d'usage de représenter systématiquement la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote au point $t = T$. De plus, cette propriété constitue une aide précieuse dans le tracé de la courbe. Attention, dans cet exercice, au décalage de cette propriété, consécutif au changement d'origine.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans les problèmes où l'on étudie successivement deux régimes différents, il convient de raisonner pas à pas. On remarquera qu'il n'y a en réalité aucun transitoire à la fermeture de l'interrupteur et que le premier régime ne fait que fixer les conditions initiales du second qui lui, est un régime transitoire de décharge d'un condensateur dans une résistance.

5. À partir de l'instant $t = 0$ et tant que le commutateur reste dans la position A, le circuit est équivalent à celui représenté sur la figure 4.19.

Ce circuit est exactement le même que celui de l'exercice 4.1. On peut donc immédiatement écrire :

$$u(t) = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right) \quad (4.8)$$

avec :

$$R_1 C = 20 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-6} = 2 \text{ s}$$

On rencontre une fois de plus ce circuit classique qui correspond à la charge d'un condensateur au travers d'une résistance.

À $t = 10 \text{ s}$, on bascule le commutateur dans la position C. Notre circuit correspond à celui représenté sur la figure 4.20.

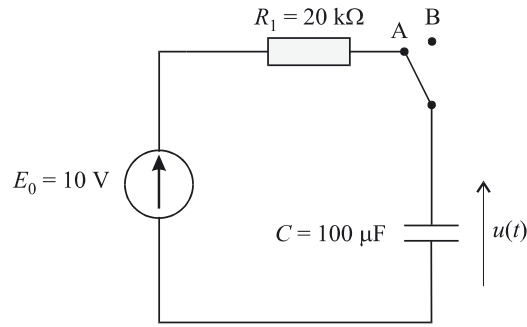


Figure 4.19

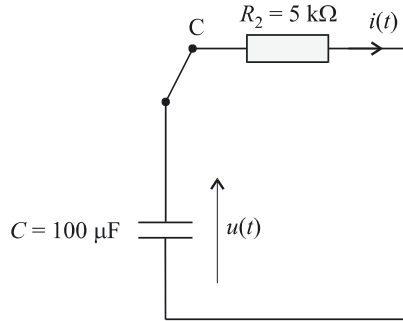


Figure 4.20

Cette fois-ci, le condensateur est chargé. Calculons la tension u_1 correspondant à cette charge. Nous pouvons, comme dans l'exercice précédent, considérer l'instant $t = 10$ s comme notre nouvelle origine des temps. La tension u_1 aux bornes de C correspond à l'expression (4.8) pour $t = 10$ s :

$$u_1 = u(10) = 10 \times \left(1 - e^{-\frac{10}{\tau}}\right) = 9,93 \text{ V}$$

Nous ne commettrons pas une très grosse erreur en considérant qu'au moment du basculement du commutateur sur C, on a en fait $u = E_0 = 10$ V. Cela revient à dire qu'au moment de cette commutation vers C, le circuit aura atteint son régime permanent.

D'après le schéma de la figure 4.20, on tire :

$$u(t) = -\frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow i(t) = -C \frac{du}{dt}$$

$$u(t) = R_2 i(t)$$

D'où :

$$u(t) + R_2 C \frac{du}{dt} = 0$$

On en déduit :

$$u(t) = k e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

avec :

$$k = u(0) = u_1 \approx 10 \text{ V}$$

Soit :

$$u(t) = E_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

avec :

$$R_2 C = 5 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 0,5 \text{ s}$$

Attention : cette expression correspond à l'évolution de $u(t)$ à partir du basculement du commutateur sur C. Ne pas oublier que nous avons changé l'origine des temps.

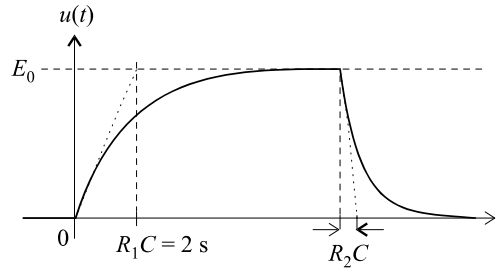


Figure 4.21

Traçons, pour conclure, l'évolution de $u(t)$ depuis le basculement initial du commutateur sur A (figure 4.21).

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice permet d'étudier la charge puis la décharge d'un condensateur au travers de deux résistances différentes. On notera la présence, par conséquent, de deux constantes de temps différentes.

6. Pour $0 \leq t \leq 3$ s, on a $u(t) = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right)$
 Toutefois, comme le basculement du commutateur se produit à $t = 3$ s, la tension aux bornes de C n'atteindra pas sa valeur de régime permanent. En effet :

$$u(3) = 10 \times \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) = 7,8 \text{ V}$$

Lorsque survient le basculement du commutateur vers C, on retrouve un régime similaire à celui que nous avons observé pour ce même basculement dans l'exercice précédent, mais cette fois-ci, la tension de charge initiale du condensateur ne vaut que $u_1 = 7,8$ V.

En plaçant une nouvelle origine des temps à cet instant de basculement, on a :

$$u(t) = 7,8 \times e^{-\frac{t}{0,5}}$$

La figure 4.22 présente l'évolution de $u(t)$.

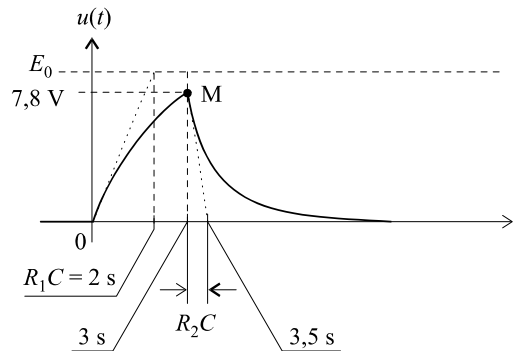


Figure 4.22

Bien remarquer que la tangente à l'origine de la décroissance exponentielle coupe toujours l'asymptote au bout d'une durée égale à la constante de temps $R_2 C$. Cette tangente se trace à partir du point M correspondant au sommet de la courbe.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : L'unique différence entre cet exercice et le précédent correspond au fait que l'on interrompt le transitoire avant l'atteinte du régime permanent. Cela ne pose en fait aucune difficulté à condition de bien évaluer la nouvelle condition initiale.

7. La tension aux bornes de la bobine est égale à $L \frac{di}{dt}$.

Par ailleurs, on a :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Soit :

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

La loi des mailles dans le circuit, après fermeture de l'interrupteur, nous donne donc :

$$E_0 = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Soit, en exprimant $i(t)$ en fonction de $u(t)$:

$$E_0 = LC \frac{d^2u}{dt^2} + u(t)$$

On aura donc :

$$u(t) = E_0 + A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

À l'instant $t = 0$, le condensateur n'est pas chargé. La tension à ses bornes est donc nulle :

$$u(0) = E_0 + A = 0 \Rightarrow A = -E_0$$

D'où :

$$u(t) = E_0 - E_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il s'agit ici d'un circuit oscillant. La seule difficulté réside dans la détermination de la constante A que l'on obtient en considérant la valeur de la tension aux bornes du condensateur à l'instant initial.

Inductances

Exercices sur les inductances

1.1 Charge d'une inductance

On considère le circuit de la figure 1 dans lequel l'interrupteur K est fermé à $t = 0$.

1. Établir l'expression de l'intensité i en fonction du temps.
2. Calculer la valeur de i pour $t = 1,2$ s.
3. Établir l'expression de u_L en fonction du temps.
4. Calculer u_L pour $t = 2,2$ s.
5. Quel est la durée du régime transitoire ?
6. Quelle est l'énergie magnétique contenue dans l'inductance en régime permanent ?

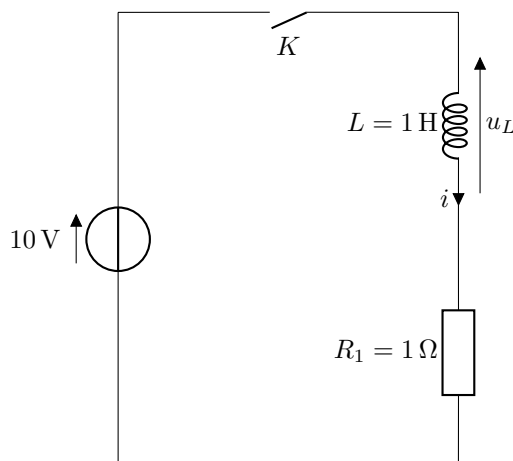


FIGURE 1 – Charge d'une inductance

Voir le corrigé [1.9 page 6](#)

1.2 Calcul d'intensités

Soit le circuit de la figure 2 [page suivante](#) en régime permanent, interrupteur K ouvert.

Déterminer i_1 , i_2 , i_3 et u_L lorsque :

1. L'interrupteur K est fermé pour la première fois ;
2. après que les courants aient atteint les valeurs de régime permanent ;
3. au moment où l'interrupteur est réouvert (après que le régime permanent ait été atteint).

Voir le corrigé [1.10 page 6](#)

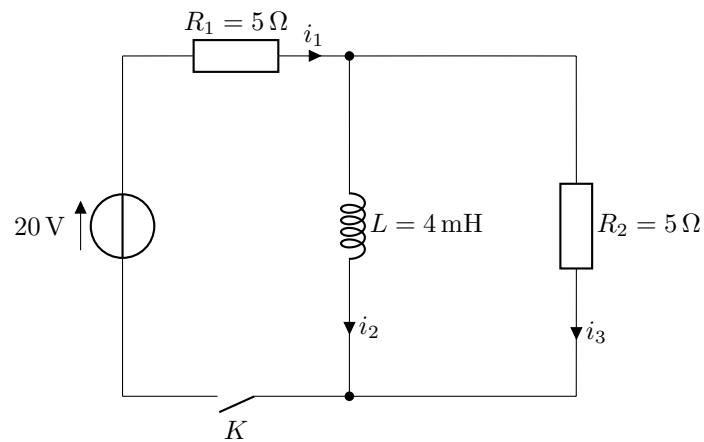


FIGURE 2 – Calcul d'intensités

1.3 Modification de l'intensité et de la tension

On considère le circuit de la figure 3 qui se trouve en régime permanent avec K_1 fermé et K_2 ouvert. À $t = 0$, on manœuvre les interrupteurs comme suit : K_2 est fermé et simultanément K_1 est ouvert.

Déterminez :

1. Le courant à travers L et R_2 à $t = 0^+$;
2. le courant à travers L à $t = 0,40$ ms ;
3. les tensions aux bornes de L et des résistances R_1 et R_2 à $t = 0,40$ ms ;
4. le courant à travers L à $t = 40$ ms ;
5. les tensions aux bornes de L et des résistances R_1 et R_2 à $t = 40$ ms.

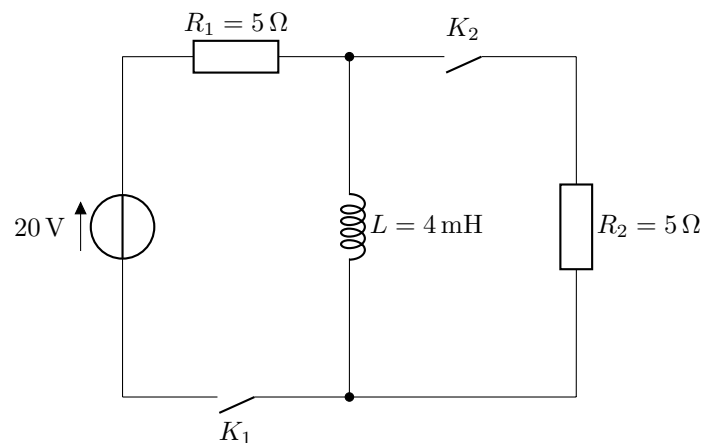


FIGURE 3 – Modification de l'intensité et de la tension

Voir le corrigé [1.11 page 7](#)

1.4 Calcul d'intensités

On considère le circuit de la figure 4 où dans un premier temps le circuit est en régime permanent, l'interrupteur K étant ouvert.

Calculer les valeurs de i_1 , i_2 et i_3 :

1. Immédiatement après la fermeture de l'interrupteur K ;
2. un long moment après que K soit fermé, en régime permanent ;
3. immédiatement après la réouverture de K ;
4. un long moment après la réouverture de K .

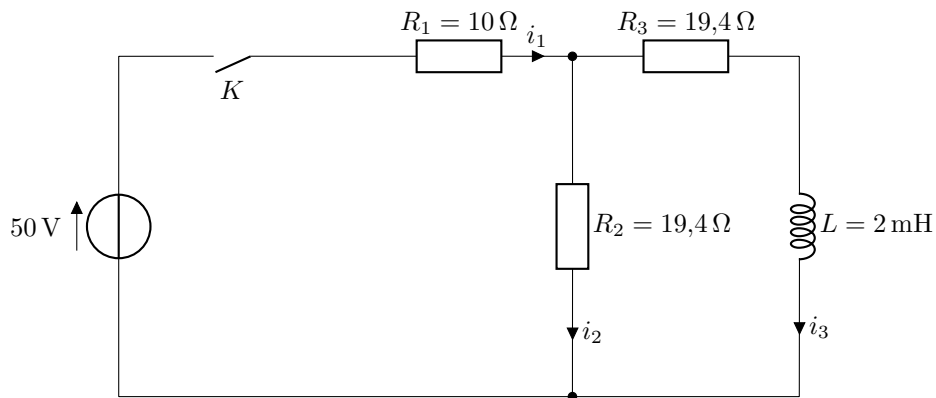


FIGURE 4 – Modification de l'intensité et de la tension

Voir le corrigé [1.12 page 8](#)

1.5 Fermeture d'interrupteur

Le circuit représenté à la figure 5 [page suivante](#) est en régime permanent, interrupteur K ouvert. L'interrupteur K est fermé à $t = 0$.

Calculer les intensités i_1 , i_2 et i_3 :

1. Lors de la fermeture de l'interrupteur K à $t = 0^+$;
2. en régime permanent, longtemps après la fermeture de K pour $t \gg 0 + 5 \cdot \tau$.

Voir le corrigé [1.13 page 9](#)

1.6 Inversion d'un courant dans une inductance

Sur la figure 6 [page suivante](#) le permutateur K est dans la position indiquée depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint.

On permute K à $t = 0$.

1. Calculer le courant dans l'inductance i_L lorsqu'un nouveau régime permanent sera atteint.
2. Combien de temps faut-il pour atteindre ce nouveau régime permanent ?
3. Tracer l'évolution du courant dans l'inductance en fonction du temps.

Voir le corrigé [1.14 page 10](#)

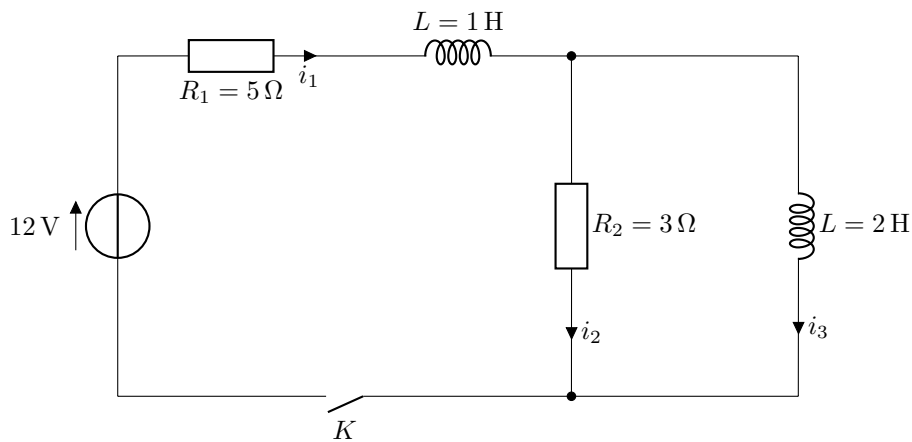


FIGURE 5 – Fermeture d'interrupteur

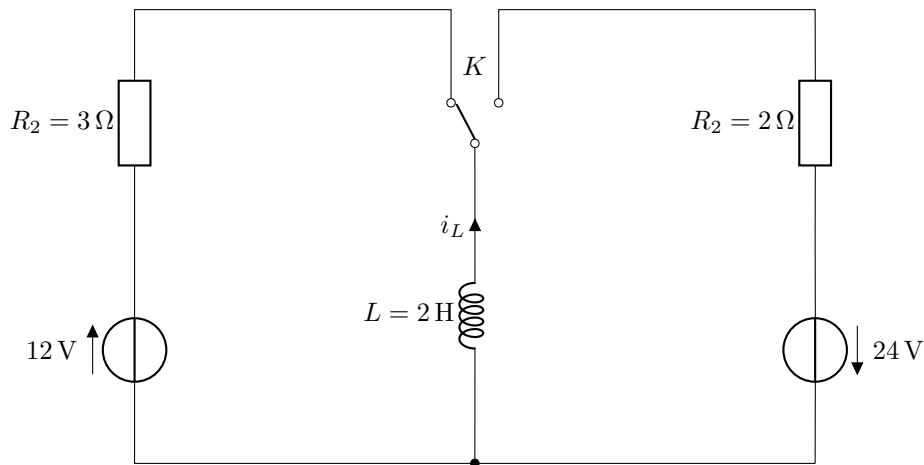


FIGURE 6 – Inversion du courant dans une inductance

1.7 Surtension à l'ouverture d'un interrupteur

Hypothèse simplificatrice : on admettra que lors de l'ouverture de l'interrupteur K à $t = 0$ le courant décroît de la valeur qu'il possédait à $t = 0^-$ à 0 de manière linéaire.

Le circuit de la figure 7 page suivante est en régime permanent, K fermé. À $t = 0$ l'interrupteur K est ouvert. Le courant s'annule en $1 \cdot 10^{-6}$ s.

En adoptant l'hypothèse simplificatrice, calculer la surtension qui apparaît entre les contacts de l'interrupteur.

Voir le corrigé 1.15 page 11

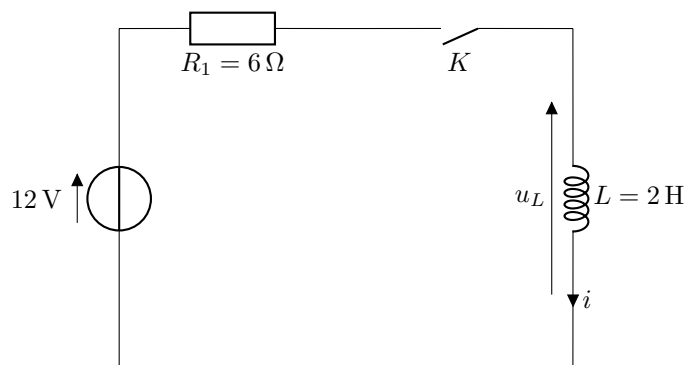


FIGURE 7 – Surtension aux bornes de l'interrupteur qui ouvre le circuit

1.8 Diode de roue libre, protection contre les surtensions

Dans le circuit de la figure 8, la diode sera considéré comme idéale, diode modèle n°1, tension de seuil nulle.

Le circuit de la figure 8 est en régime permanent, interrupteur K ouvert. Cet interrupteur est fermé à $t = 0$. Calculer les intensités i_1 , i_2 et i_3 :

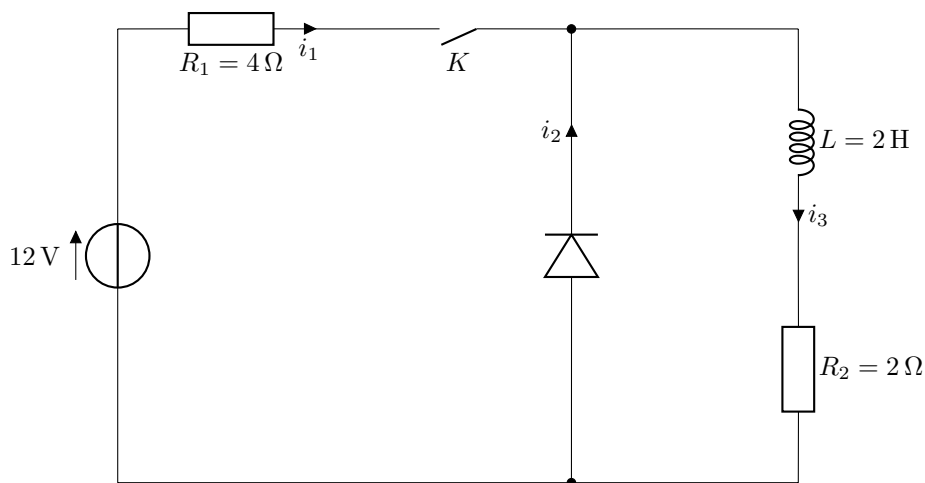


FIGURE 8 – Diode de roue libre

1. Lors de la fermeture de l'interrupteur K à $t = 0^+$;
2. en régime permanent, longtemps après la fermeture de K pour $t \gg 0 + 5 \cdot \tau$.

En régime permanent, K étant fermé, on fixe une nouvelle origine des temps $t = 0$ à l'instant où l'interrupteur K est ouvert.

3. Calculer les intensités i_1 , i_2 et i_3 à cet instant $t = 0^+$.
4. Combien de temps faut-il pour que les intensités i_1 , i_2 et i_3 s'annulent ?

Voir le corrigé [1.16 page 11](#)

Solutions des exercices sur les inductances

1.9 Charge d'une inductance 1.1 page 1

1. Le cours permet d'écrire directement : $i = 10 \cdot (1 - \exp(-t))$.
Ici, $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1\text{H}}{1\Omega} = 1$.
2. Pour $t = 1,2\text{ s}$, $i = 10 \cdot (1 - \exp(-1,2)) \simeq 7\text{ A}$.
3. Le cours permet d'écrire directement : $u_L = 10 \cdot \exp(-t)$, avec la même constante de temps égale à 1 que pour i .
4. Pour $t = 2,2\text{ s}$, $u_L = 10 \cdot \exp(-2,2) \simeq 1,1\text{ V}$.
5. Le régime transitoire dure $5 \cdot \tau = 5\text{ s}$.
6. En régime permanent, l'intensité qui traverse l'inductance est de (loi d'Ohm appliquée à la résistance, l'inductance se comportant désormais comme un bout de fil) $\frac{10\text{ V}}{1\Omega} = 10\text{ A}$. L'énergie contenue dans l'inductance est :

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^2 = 50\text{ J}$$

1.10 Calcul d'intensités 1.2 page 1

L'énoncé ne demande pas d'exprimer la fonction des intensités en fonction du temps, juste les valeurs...

1. En admettant que le circuit était bien en régime permanent avec $i_1 = i_2 = i_3 = 0$, juste après la fermeture de K l'intensité dans l'inductance demeure nulle (continuité de l'intensité dans l'inductance), $i_2 = 0$.
Les courants i_1 et i_3 sont égaux et valent :

$$i_1 = i_3 = \frac{20\text{ V}}{5\Omega + 5\Omega} = 2\text{ A}$$

2. En régime permanent, l'inductance est équivalente à un fil :

$$i_2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

L'inductance court-circuite la résistance de droite dans laquelle le courant est donc nul : $i_3 = 0$. Les courants dans la résistance de gauche et dans l'inductance sont égaux, on obtient leur valeur en appliquant la loi d'Ohm à la résistance de gauche :

$$i_1 = i_2 = \frac{20\text{ V}}{5\Omega} = 4\text{ A}$$

3. Après la réouverture de l'interrupteur, bien évidemment $i_1 = 0$. Le courant dans l'inductance étant une fonction continue du temps, l'intensité dans l'inductance conserve un très court instant la valeur qu'elle avait juste avant la réouverture de K . On a donc $(i_2)_{t=0^+} = 4\text{ A}$.
L'intensité que fait circuler l'inductance circule dans la résistance de droite du bas vers le haut. Par conséquent, $i_3 = -i_2 = -4\text{ A}$.

1.11 Modification de l'intensité et de la tension 1.3 page 2

1. En régime permanent avec K_1 fermé et K_2 ouvert, $i_L = 4$ A, intensité qui circule du haut vers le bas.

En ouvrant K_1 simultanément à la fermeture de K_2 , le courant dans l'inductance n'est pas modifié sur un intervalle de temps extrêmement court dt . Ainsi on a toujours à $t = 0^+$, $i_L = 4$ A. Ce courant traverse R_2 du bas vers le haut et vaut 4 A. Le courant dans R_1 est bien entendu nul.

2. Le cours nous indique que le courant dans l'inductance évolue suivant la loi :

$$i_L = 4 \cdot \exp\left(-\frac{t}{8 \cdot 10^{-4}}\right)$$

Ici, $\tau = \frac{L}{R} = \frac{4 \text{ mH}}{5 \Omega} = 8 \cdot 10^{-4}$ s.

Donc, $(i_L)_{t=0,4 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot \exp\left(-\frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}}\right) = 2,42$ A

3. Pour prolonger $i_L = 4$ A, une tension de $i_L \times R_2 = 4 \times 5 = 20$ V doit apparaître aux bornes de L avec la borne + en bas de l'inductance.

Le cours nous indique que u_L évolue de la manière suivante :

$$u_L = 20 \cdot \exp\left(-\frac{t}{8 \cdot 10^{-4}}\right)$$

Cette tension est égale à celle aux bornes de R_2 . À $t = 0,4$ ms, ces tensions valent :

$$20 \times \exp\left(-\frac{4}{8}\right) = 12,13 \text{ V}$$

Valeur que l'on peut retrouver plus simplement à l'aide de la loi d'Ohm :

$$u_L = u_{R_2} = R_2 \cdot i_{t=0,4 \cdot 10^{-3}} = 5 \times 2,42 = 12,13 \text{ V}$$

4. Comme nous venons de le voir, à $t = 0,4$ ms, $u_{R_2} = u_L = 12,13$ V.

La résistance R_1 étant traversée par un courant nul (K_1 ouvert), $u_{R_1} = 0$.

5. Il suffit de reprendre l'expression $i_L = 4 \cdot \exp\left(-\frac{t}{8 \cdot 10^{-4}}\right)$, avec $t = 40$ ms. Il vient :

$$i_L = 4 \cdot \exp\left(-\frac{40 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}}\right) = 7,7 \cdot 10^{-22} \text{ A} \simeq 0$$

Mais point n'était besoin d'effectuer ce calcul ! Ce résultat était prévisible, car $40 \text{ ms} \gg 5 \cdot \tau = 4 \text{ ms}$, le régime permanent est atteint. L'inductance s'est vidée de son énergie magnétique et n'est plus capable de « pousser » le courant, celui-ci est donc nul.

1.12 Calcul d'intensités 1.4 page 3

Dans cet exercice il n'est pas demandé les fonctions d'évolution de l'intensité au cours du temps, juste les valeurs des intensités à des instants bien précis. Pour les déterminer, il suffit de se souvenir que l'intensité est une fonction continue du temps.

1. Immédiatement avant la fermeture de K , l'intensité dans l'inductance est nulle et elle le demeure pendant un intervalle de temps dt , donc pour $(i_3)_{t=0+} = 0$

$$(i_3)_{t=0-} = 0 \Rightarrow (i_3)_{t=0+} = 0$$

2. En régime permanent, l'inductance ne s'oppose plus à la variation du courant et se comporte comme un fil. Le circuit équivalent est celui de la figure 9

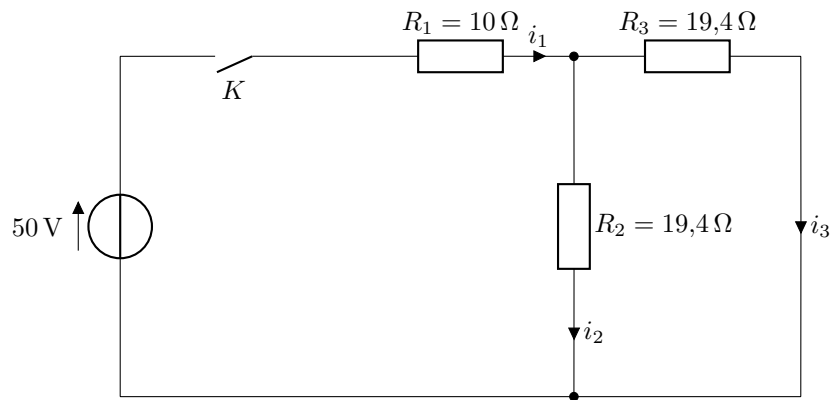


FIGURE 9 – Modification de l'intensité et de la tension

Dans la figure 9, on calcule d'abord i_1 en regroupant les résistances R_2 et R_3 en une seule résistance équivalente en série avec R_1 comme le montre la figure 10 page suivante

Avec $R_{eq} = \frac{19,4}{2} = 9,7\Omega$, $i_{eq} = i_1 = \frac{50}{10+9,7} = 2,538\text{ A}$.

En appliquant la formule du diviseur de courant pour obtenir i_2 et i_3 . Les résistances R_2 et R_3 sont égales, il s'agit d'un diviseur de courant par 2. On obtient donc : $i_2 = i_3 = \frac{i_1}{2} \simeq 1,27\text{ A}$.

Bien évidemment, les intensités auraient pu être déterminées par d'autres méthode comme Millman, Thévenin, Norton, superposition des états électriques.

3. Le circuit étant en régime permanent avec les valeurs d'intensités trouvées ci-dessus, K est réouvert à l'instant que nous baptiseront encore 0. Bien évidemment, $i_1 = 0$. La continuité de l'intensité dans l'inductance conduit à :

$$(i_3)_{t=0+} = (i_3)_{t=0-} = 1,27\text{ A}$$

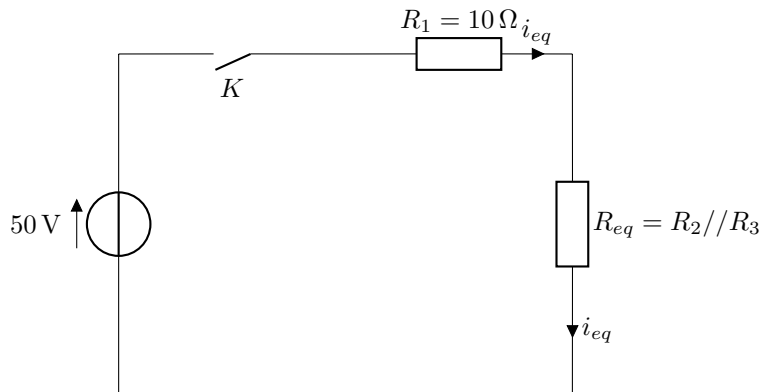


FIGURE 10 – Modification de l'intensité et de la tension

Cette intensité circule dans la résistance R_2 du bas vers le haut, on a donc :

$$i_2 = -i_3 = -1,27 \text{ A}$$

4. Un long moment après la réouverture de K , l'inductance s'est vidée de son énergie magnétique et n'est plus capable de prolonger le passage du courant i_3 qui s'annule, ainsi que i_2 .

Un long moment après la réouverture de K , on a : $i_1 = i_2 = i_3 = 0$.

1.13 Fermeture d'interrupteur 1.5 page 3

1. La continuité de l'intensité dans les inductances nous donne :

$$\begin{cases} (i_1)_{t=0^+} = (i_1)_{t=0^-} = 0 \text{ A} \\ (i_3)_{t=0^+} = (i_3)_{t=0^-} = 0 \text{ A} \end{cases}$$

La loi des nœuds appliquée à $t = 0^+$ donne $i_2 = i_1 - i_3 = 0 \text{ A}$.

2. En régime permanent, les inductances se sont chargées en énergie magnétique, elles cessent de s'opposer à l'établissement du courant, elles sont équivalentes à des fils (fils remplis d'énergie magnétique et prêts à s'opposer à une diminution de l'intensité...). Le circuit équivalent 11 page suivante est donc le suivant :

La résistance R_2 étant court-circuitée, on a : $i_2 = 0 \text{ A}$.

Simplifions encore le circuit de la figure 11 page suivante, on obtient le circuit de la figure 12 page suivante :

La figure 12 page suivante permet d'écrire :

$$i_1 = i_3 = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ A}$$

NOTA : On aurait pu poser la question « que deviennent les intensités à la réouverture de K ». La réponse est loin d'être simple dans la mesure où l'intensité

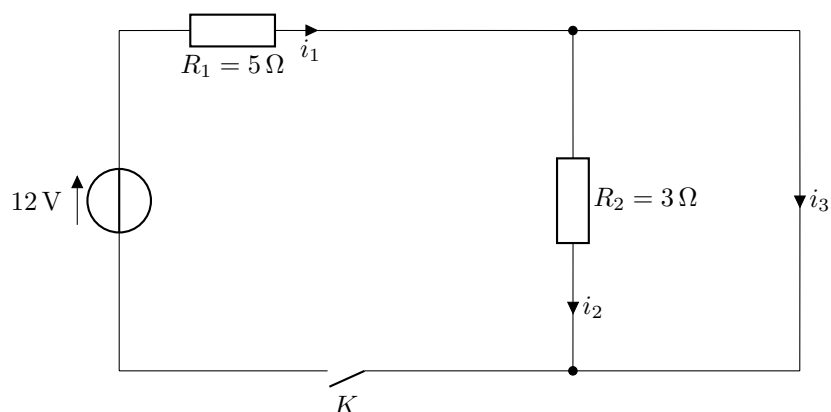


FIGURE 11 – Fermeture d'interrupteur K fermé en régime permanent

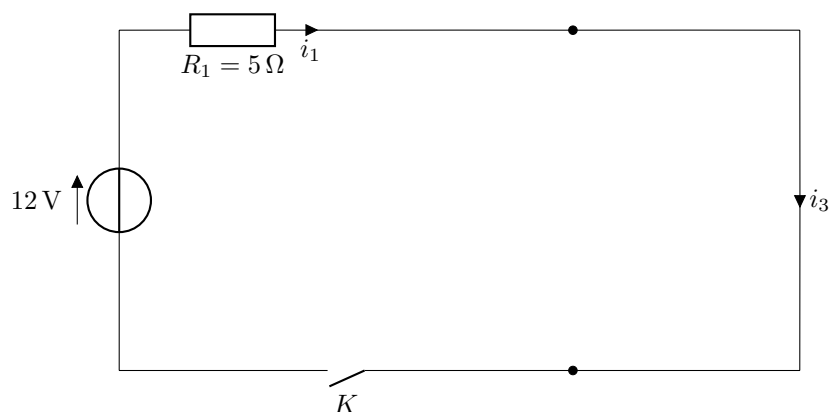


FIGURE 12 – Fermeture d'interrupteur K fermé en régime permanent

i_1 ne s'annulera pas immédiatement. En effet, comme le montre l'exercice 1.7 page 4, la surtension entre les pôles de l'interrupteur qui apparaît à l'ouverture de celui-ci permet au courant de continuer à passer à travers l'arc électrique qui se crée. La loi de variation de l'intensité en fonction du temps dans un tel arc électrique n'est pas une fonction simple. L'hypothèse faite à l'exercice 1.7 page 4 d'un courant décroissant linéairement est simpliste, mais elle permet de mettre en évidence les valeurs de surtension, valeurs qui, elles, sont parfaitement réalistes.

1.14 Inversion du courant dans une inductance 1.6 page 3

1. Pour $t = 0^-$, le courant dans l'inductance vaut :

$$(i_L)_{t=0^-} = \frac{12}{3} = -4 \text{ A}$$

La continuité du courant dans l'inductance impose :

$$(i_L)_{t=0^+} = (i_L)_{t=0^-} = -4 \text{ A}$$

Lorsque la nouvelle intensité se sera établie dans l'inductance et qu'un nouveau régime permanent sera atteint, la nouvelle valeur de i_L sera :

$$(i_L)_{t \rightarrow \infty} = \frac{24}{2} = 12 \text{ A}$$

Le signe + provient du fait que le sens du courant dans l'inductance s'est inversé.

2. La constante de temps à prendre en compte est celle correspondant au « nouveau » circuit, après basculement du permutateur, $\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ s}$. Il faudra $5\tau = 5 \text{ s}$ pour passer de -4 A à 12 A , comme le montre la figure [13 page suivante](#).
3. Le tracé de l'évolution de l'intensité en fonction du temps est montré à la figure [13 page suivante](#).

1.15 Surtension à l'ouverture d'un interrupteur [1.7 page 4](#)

Avant l'ouverture de l'interrupteur K , l'intensité a pour valeur : $I = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$. Quelques instants après l'intensité s'est annulée.

Selon l'hypothèse simplificatrice :

$$L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = 2 \cdot \frac{2 - 0}{0 - 1 \cdot 10^{-6}} = -4 \text{ MV}$$

Le signe $-$ vient du fait que l'inductance se transforme en générateur de tension et que la tension s'est inversée par rapport à celle figurant sur la figure [7 page 5](#). Mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici.

Cet exercice a pour but de mettre en évidence la très grande valeur de la surtension qui apparaît aux bornes des pôles de l'interrupteur qui s'ouvre. Rappelons que pour avoir une étincelle à travers 1 cm d'air, il faut une tension de 30 kV . Ici, nous sommes dans un ordre de grandeur mille fois plus élevé, une étincelle, un arc électrique va apparaître aux bornes de l'interrupteur.

Pour un interrupteur mécanique, cet arc électrique arrache des particules de métal. Ouverture après ouverture, l'interrupteur « s'use » et finit par être détruit. S'il s'agit d'un interrupteur électronique (transistor à jonction, à effet de champ, thyristor) la destruction est immédiate !

1.16 Diode de roue libre, protection contre les surtensions [1.8 page 5](#)

À $t = 0^+$, aucun courant ne circule dans la diode qui est « en inverse » (on pourrait aussi débrancher la diode et s'assurer que $V_{AK} < 0$, donc à $t = 0^+$, $i_2 = 0$).

1. L'intensité dans l'inductance étant continue par rapport au temps, on a :

$$(i_L)_{t=0^+} = (i_L)_{t=0^-} = 0 \text{ A}$$

D'après la loi des nœuds appliquée à $t = 0^+$:

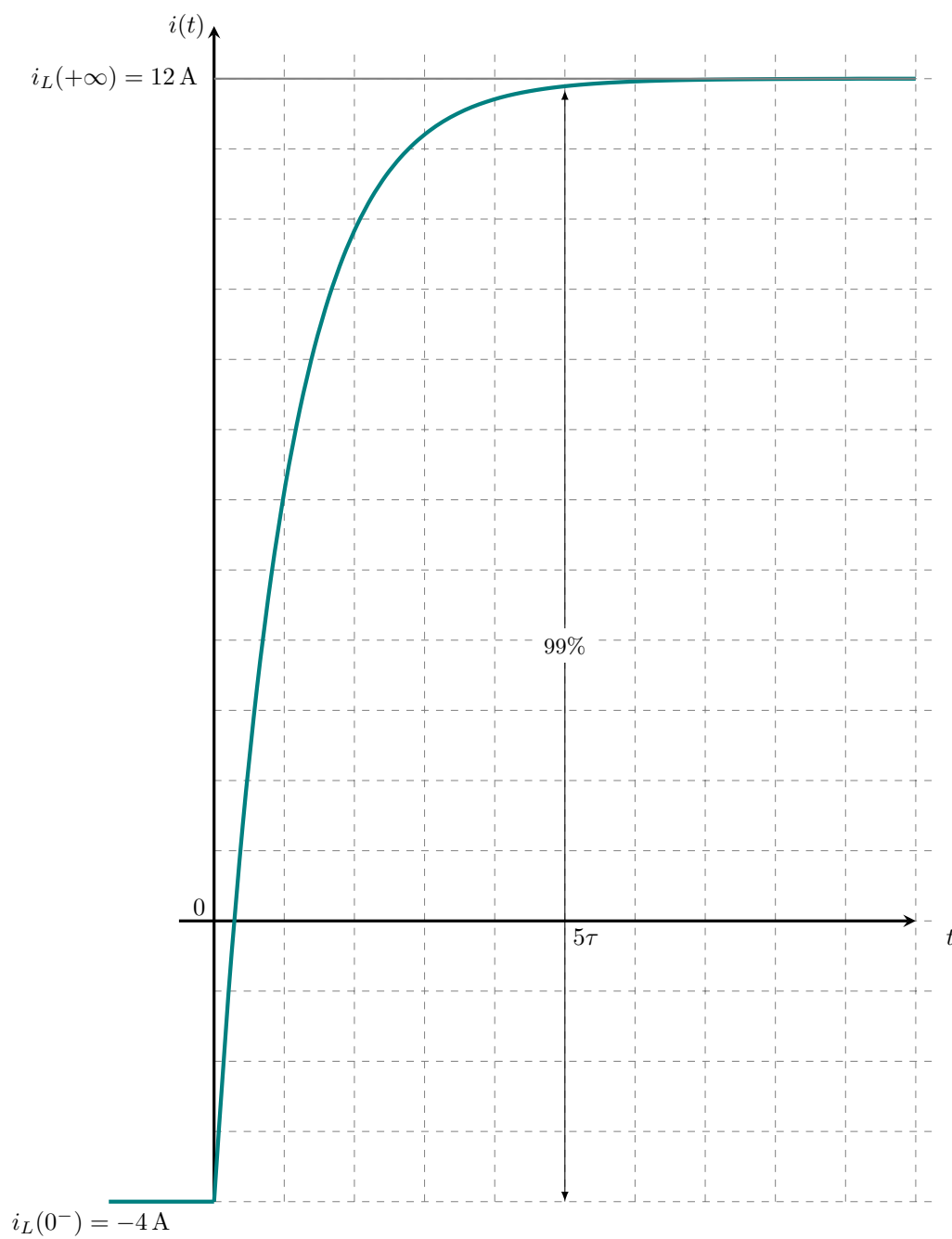


FIGURE 13 – Inversion de l'intensité dans l'inductance.

$$(i_1)_{t=0+} = (i_2)_{t=0+} + (i_3)_{t=0+} = 0 \text{ A}$$

2. En régime permanent, i_2 continue à être nul, l'inductance est équivalente à un fil :

$$i_1 = i_3 = \frac{12}{4+2} = 2 \text{ A}$$

3. L'intensité dans l'inductance décroît extrêmement rapidement avec l'ouverture de K , une surtension apparaît aux bornes de L . Mais, dès que la tension aux bornes de l et de R_2 dépasse la tension de seuil de la diode, ici nulle, celle-ci se transforme en interrupteur fermé et empêche toute surtension d'apparaître aux bornes de l'interrupteur qui s'ouvre. La diode protège l'interrupteur des surtensions.

L'interrupteur peut jouer son rôle et interrompre le passage du courant :

$$(i_1)_{t=0+} = 0 \text{ A}$$

L'intensité prolongée par l'inductance passe par la diode et on a :

$$(i_L)_{t=0+} = (i_L)_{t=0-} \Rightarrow (i_3)_{t=0+} = (i_2)_{t=0+} = 2 \text{ A}$$

4. i_1 s'annule instantanément.

Pour i_2 et i_3 , La diode étant équivalente à un fil, on retrouve le circuit de décharge d'une inductance semblable à celui du cours. L'intensité met $5 \cdot \tau$ pour s'annuler. Ici, avec $\tau = \frac{2H}{2\Omega} = 1 \text{ s}$, il faut 5 s pour atteindre le nouveau régime permanent pour lequel :

$$i_1 = i_2 = i_3 = 0 \text{ A}$$

Ces intensités i_2 et i_3 mettent donc 5 s à s'annuler.

Concernant la protection de l'interrupteur, on peut faire deux types de raisonnements :

en courant : la diode offre un chemin « infiniment facile » au courant prolongé par la diode. Ainsi, plus aucune intensité ne passera dans l'interrupteur. L'intensité va s'éteindre progressivement, l'énergie magnétique de la diode étant convertie en effet Joule dans les résistances qui ont été négligées, mais qui sont toujours présentes dans la réalité. La diode n'est pas non plus idéale, le produit de sa faible tension de seuil par l'intensité est une puissance transformée en chaleur. Ces différents « frottements électriques » dissipent l'énergie magnétique de l'inductance et quand celle-ci s'est vidée de toute son énergie, l'intensité devient nulle.

en tension : la diode court-circuite le circuit inductif et empêche la surtension d'apparaître. Avec un modèle de diode plus réaliste prenant en compte un seuil de 0,7 V, la surtension est limitée à cette valeur.

En courant continu on installe quasi systématiquement des diodes de roue libre aux bornes des récepteurs inductifs afin de faciliter la coupure du courant.

En alternatif, l'intensité s'annule toutes les demi-périodes, il n'y a pas besoin de diode de roue libre. Même si un dispositif de coupure est actionné au début d'une demi-période et que l'inductance tend à prolonger l'intensité, la demi-période étant écoulée, l'intensité s'annule d'elle-même (courant alternatif) et la coupure s'effectue.

L & C

régimes transitoires

Exercices sur les régimes transitoires dans les circuits comportant des condensateurs et des inductances

1. Quelle sera l'intensité du courant circulant dans le circuit du condensateur à partir de $t = 0$, si ce dernier porte une charge nulle à $t = 0$ et si la tension à ses bornes évolue comme indiqué sur la Figure 82 ?

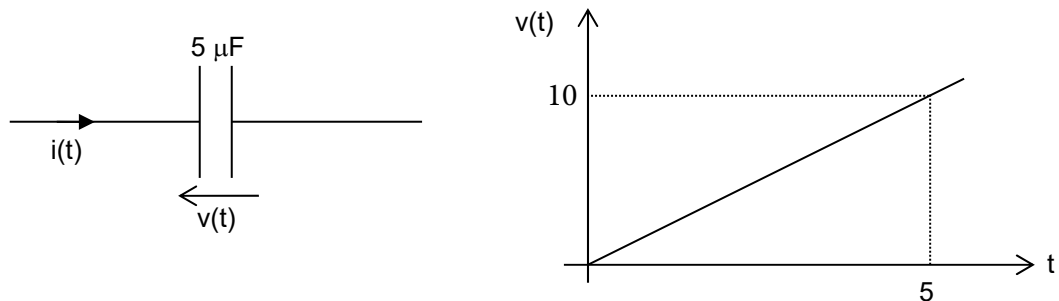


Figure 82

2. L'intensité circulant dans un condensateur idéal a l'allure indiquée Figure 83. Quelle sera l'allure de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur ?

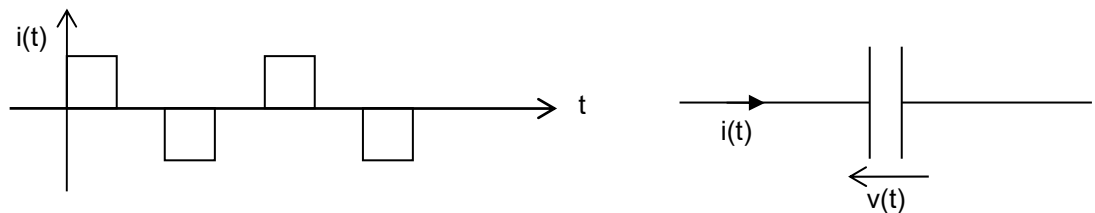


Figure 83

3. L'intensité circulant dans une inductance a l'allure indiquée Figure 84. Quelle sera la forme de la tension à ses bornes en fonction du temps ?

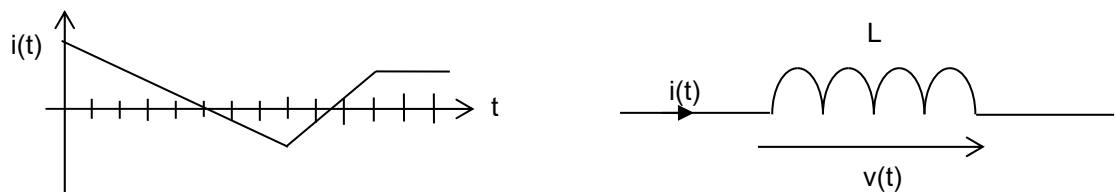


Figure 84

4. La Figure 85 possède un dipôle inconnu X. À l'instant t_0 , on ferme l'interrupteur K. L'évolution de la tension aux bornes du dipôle inconnu est donnée par la Figure 85. Quel est la nature du dipôle X, une résistance, un condensateur, une inductance ?

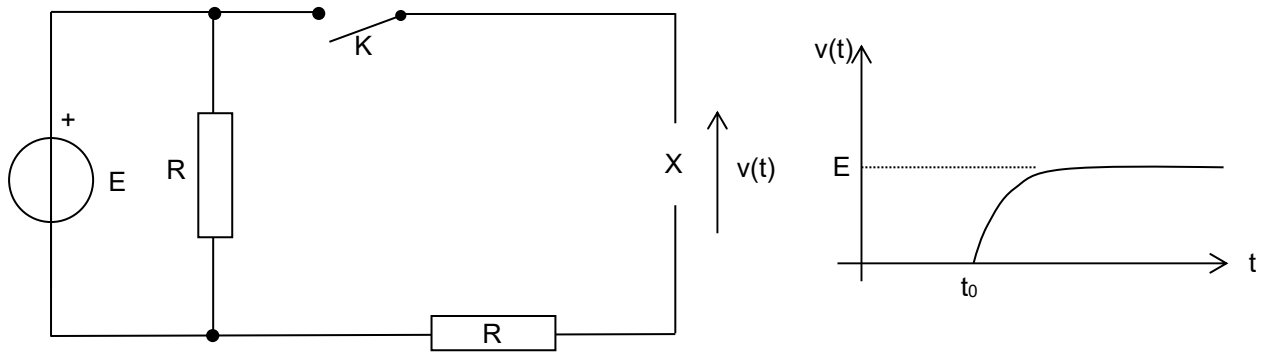


Figure 85

5. La Figure 86 possède un dipôle inconnu X. À l'instant t_0 , on ferme l'interrupteur K. L'évolution de la tension aux bornes du dipôle inconnu est donnée par la Figure 86. Quel est la nature du dipôle X, une résistance, un condensateur, une inductance ?

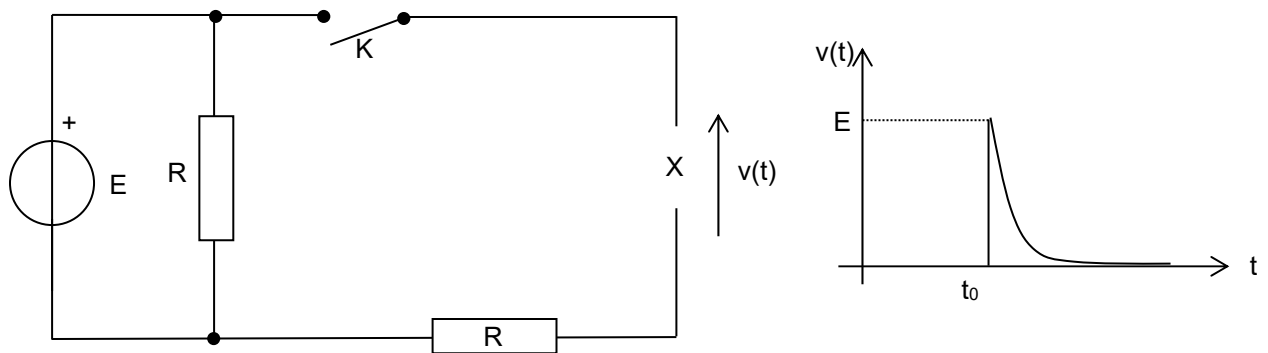


Figure 86

6. Dessiner l'évolution de la tension $v(t)$ pour les deux circuits des Figure 87 et Figure 88 lorsque l'on manœuvre l'interrupteur K à l'instant t_0 .

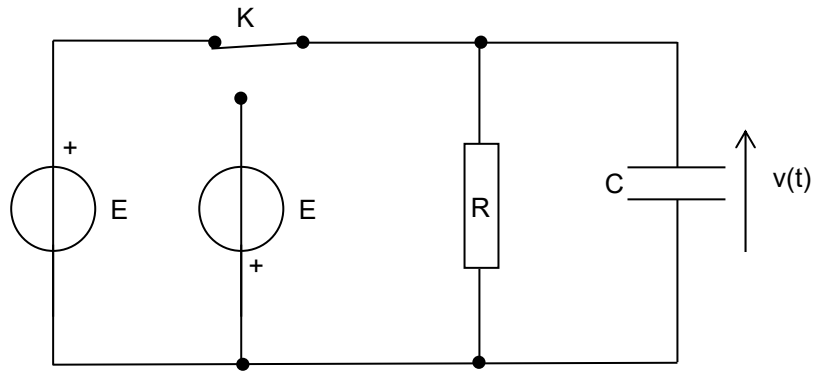


Figure 87

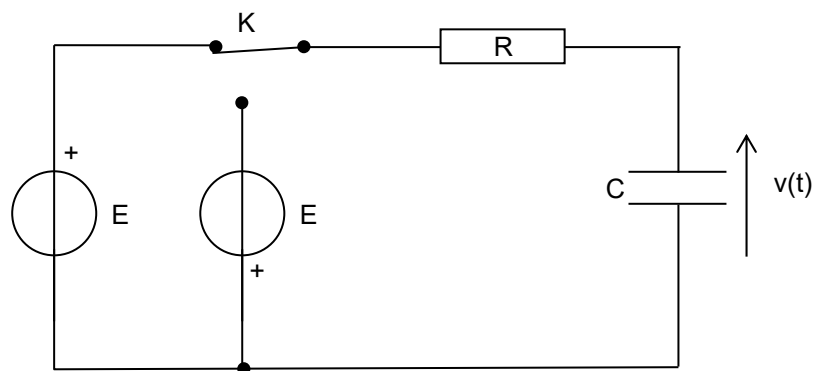


Figure 88

7. On considère le schéma de la Figure 89 où X est un dipôle inconnu idéal et où R est une résistance de très faible valeur. Un oscilloscope permet d'observer v_R et v_X . Quel est le dipôle inconnu X : une résistance, une inductance, un condensateur ?

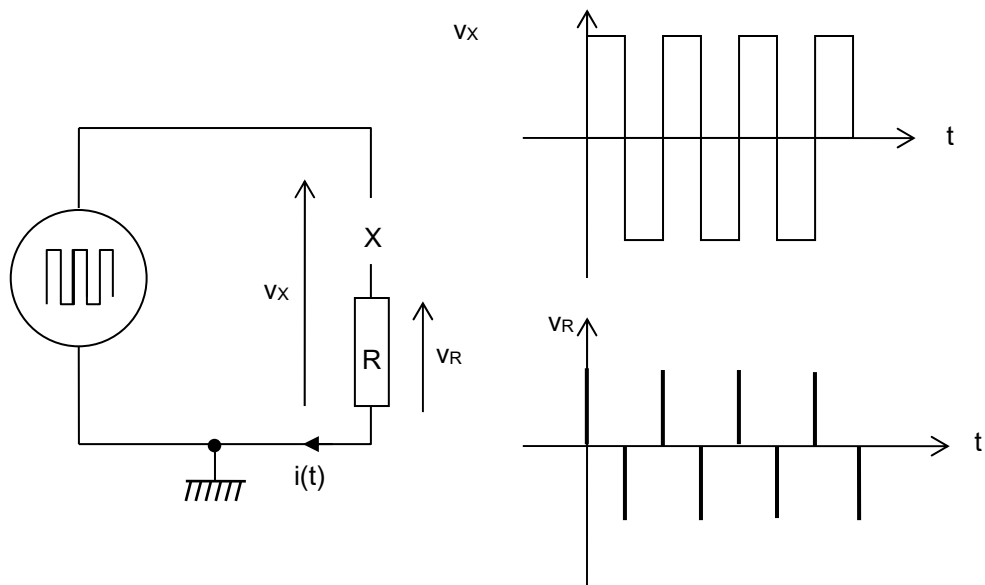


Figure 89

8. Le circuit de la Figure 90 se trouvant en régime permanent, quelle est la valeur de l'intensité passant dans l'inductance avant l'ouverture de K. On ouvre l'interrupteur K à $t = t_0$. Quelle est l'intensité passant dans l'inductance après l'ouverture de K, une fois atteint le nouveau régime permanent ? Quelle est la valeur de $\frac{di}{dt}$ dans l'inductance, immédiatement après l'ouverture de K ?

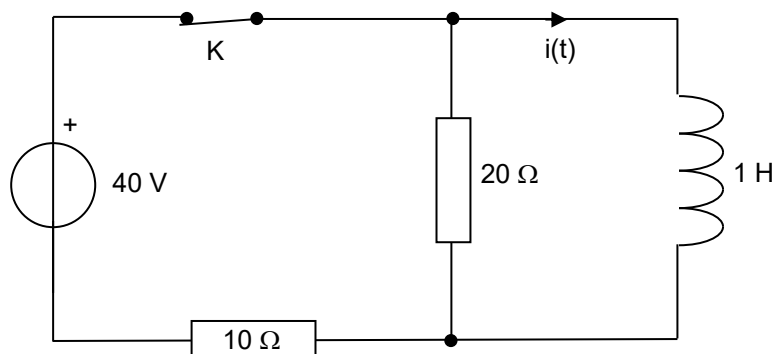


Figure 90

9. Le commutateur K de la Figure 91 est manœuvré à t_0 , dessiner l'allure de la tension $v(t)$.

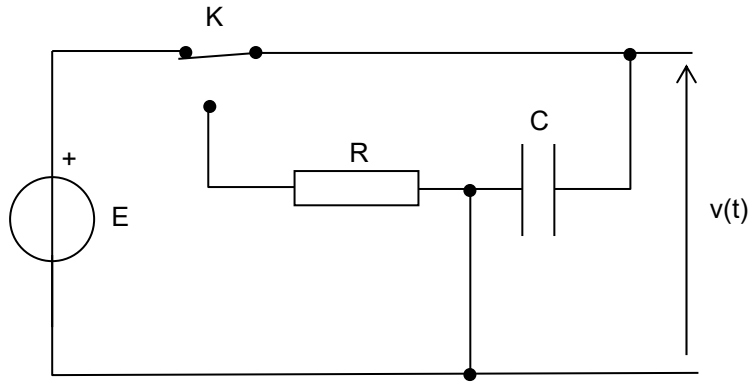


Figure 91

10. On manœuvre le commutateur K de la Figure 92 à l'instant t_0 . Que vaut $\frac{dv}{dt}$?

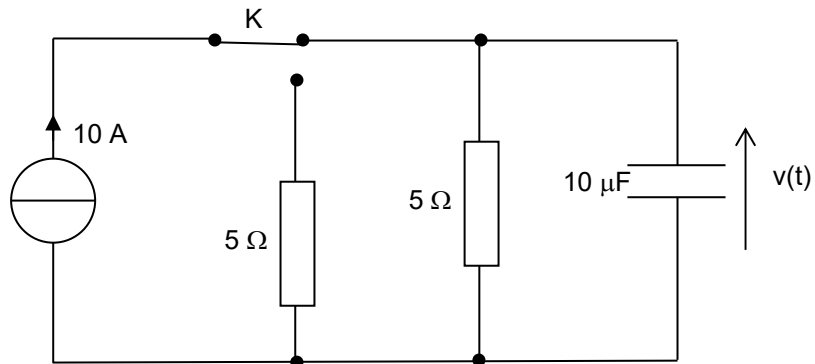


Figure 92

11. On ouvre l'interrupteur de la Figure 93 à l'instant t_0 . Quelle est alors la valeur de $i(t)$, intensité passant dans les conducteurs du condensateur ?

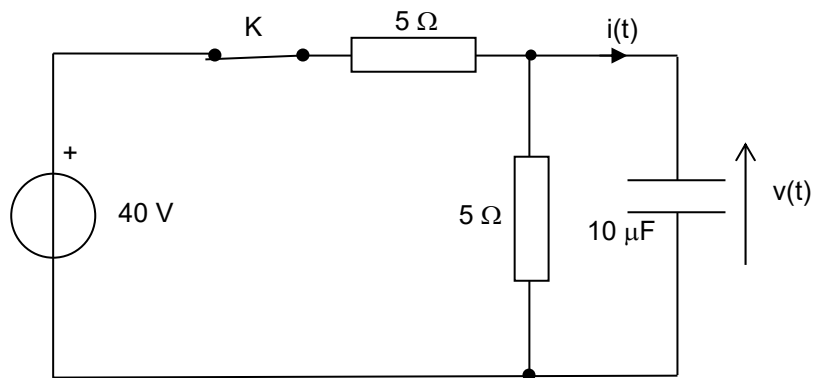


Figure 93

12. Le circuit de la Figure 94 est en régime permanent, interrupteur K ouvert. L'interrupteur K est fermé à $t = t_0$. Le condensateur est initialement déchargé, déterminer l'évolution de la d.d.p. aux bornes du condensateur de $t = t_0$ à t très grand.

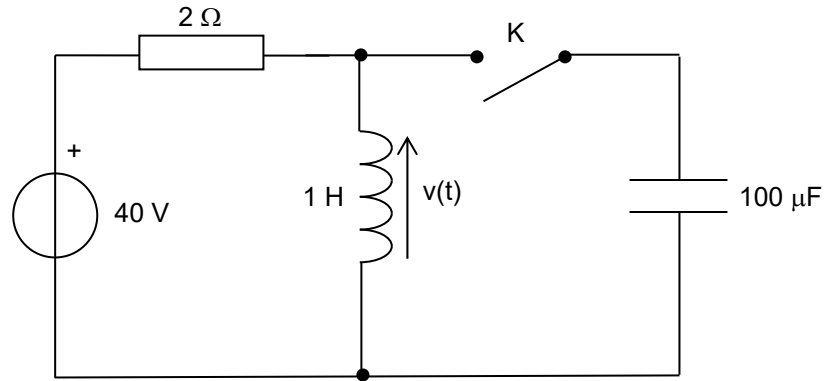


Figure 94

13. Le commutateur de la Figure 95 est manœuvré à l'instant $t = t_0$. Déterminer l'intensité du courant électrique traversant la branche contenant la résistance et l'inductance avant cet instant et juste après cet instant. Quelle sera la valeur de cette intensité une fois le régime permanent établi ?

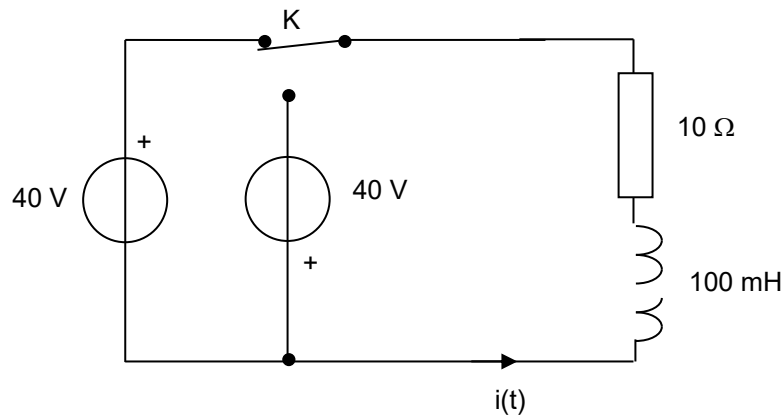


Figure 95

14. Placer une diode de roue libre sur le schéma de la Figure 96 afin d'éviter l'apparition d'étincelles aux bornes de l'interrupteur K.

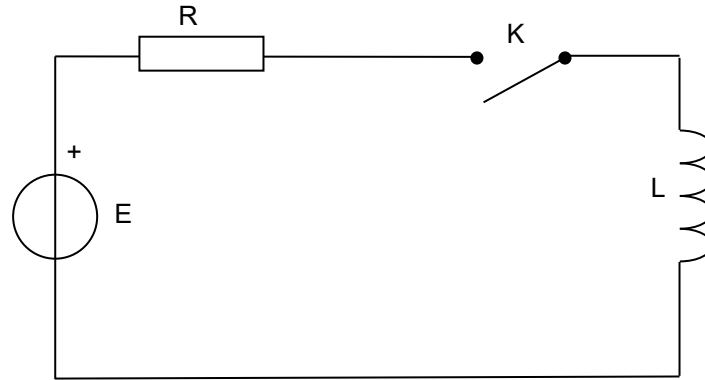


Figure 96

15. Indiquer la nature du générateur nécessaire afin d'obtenir une variation linéaire de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur C en fonction du temps.

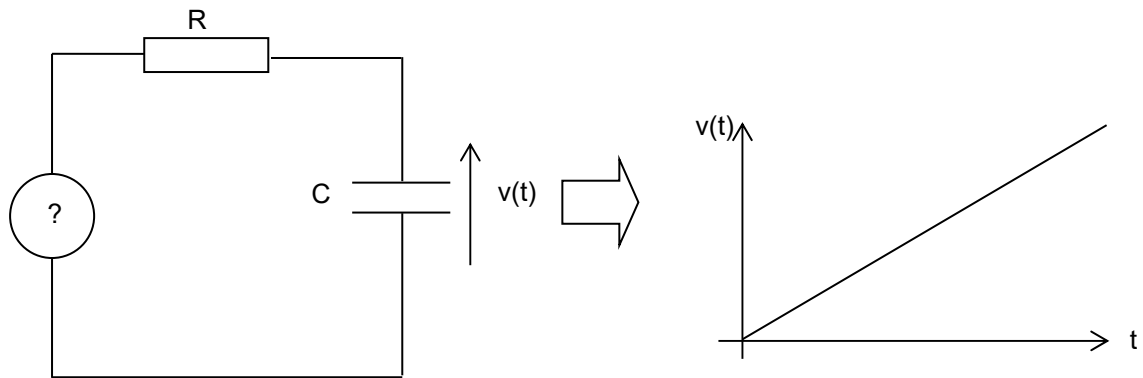


Figure 97

16. Dans la Figure 98 le condensateur n°1 ($C_1 = 900 \mu\text{F}$) est chargé sous une d.d.p. initiale de 100 V et le condensateur n°2 ($C_2 = 100 \mu\text{F}$) n'est pas chargé. L'inductance a une valeur de 10,0 H. Décrivez en détail comment on pourrait conférer une d.d.p. de 300 V au condensateur n°2 en manipulant les interrupteurs K1 et K2.

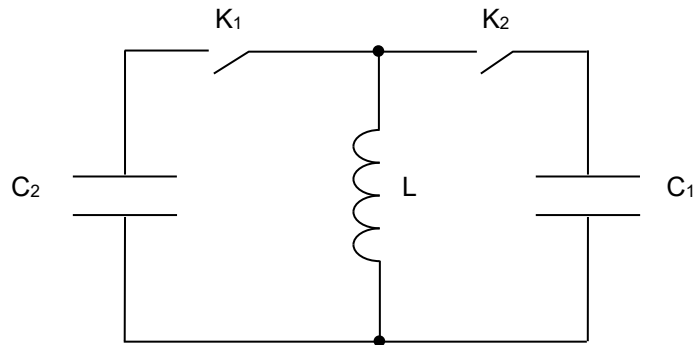


Figure 98

17. Un condensateur de $20 \mu\text{F}$ est chargé jusqu'à ce que la d.d.p. entre armatures atteigne 100 V. La source de tension est déconnectée une fois le condensateur chargé. Cela fait, on connecte le condensateur chargé à une inductance en série avec celui-ci. L'inductance a une valeur de 10 mH. Des oscillations se produisent. En négligeant la résistance électrique de la maille condensateur inductance, quelle est l'intensité maximale de l'intensité du courant électrique dans l'inductance ?

Solutions :

1. Pour un condensateur, la d.d.p. entre les armatures v est reliée à q , charge portée par une de celles-ci par la relation : $q = Cv \Rightarrow \frac{dq}{dt} = i = C \frac{dv}{dt}$.

Ici, la d.d.p. évolue linéairement en fonction du temps et croît de 10 V en 5 s, d'où :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow i = 5 \cdot 10^{-6} \times 2 = 10 \mu\text{A}.$$

2. La relation vue à la question précédente nous permet de déterminer $v(t)$ en fonction de $i(t)$:

$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \frac{1}{C} \int i dt.$$

En intégrant la courbe de $i(t)$, on obtient $v(t)$ (courbe en pointillé) Figure 99 :

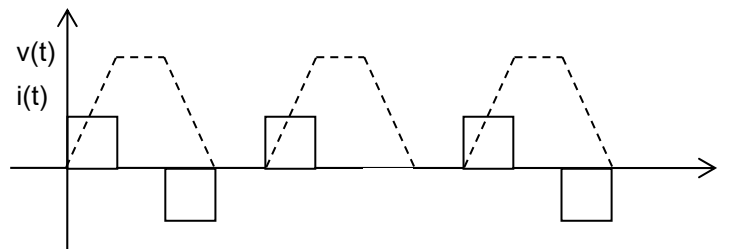


Figure 99

3. Pour une inductance, la relation à considérer est : $e = -L \frac{di}{dt}$, e étant la d.d.p. aux bornes de l'inductance.

$e(t)$ (courbe en pointillé) sera obtenue en prenant l'opposé de la dérivée de $i(t)$ Figure 100 :

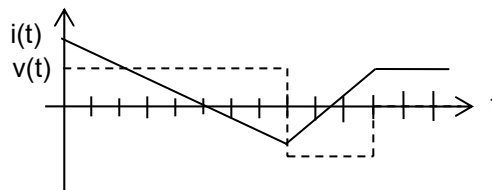


Figure 100

4. Il faut examiner ce qui se passe lorsque $t < 0$ et lorsque $t \rightarrow \infty$. Lorsque $t < 0$, la tension aux bornes est nulle. On ne peut rien en conclure, le dipôle pourrait très bien être une résistance (d.d.p. aux bornes nulle si courant nul), une inductance, ou un condensateur déchargé.

Après t_0 , la d.d.p. varie exponentiellement, puis, lorsque t devient très grand, elle demeure constante.

Cette variation exponentielle écarte la résistance pour laquelle on aurait une variation de tension présentant un front vertical. Une inductance présenterait une d.d.p. qui redeviendrait nulle une fois le courant établi à une valeur constante.

C'est l'allure de l'évolution de la d.d.p. aux bornes d'un condensateur qui se charge. Le dipôle inconnu est un condensateur.

5. Il faut examiner ce qui se passe lorsque $t < 0$ et lorsque $t \rightarrow \infty$. Lorsque $t < 0$, la d.d.p. aux bornes du dipôle est égale à E et elle décroît exponentiellement jusqu'à 0 lorsque t croît. La décroissance exponentielle écarte la résistance. La d.d.p. aux bornes d'un condensateur devient non nulle et constante lorsqu'il est chargé à tension constante à travers une résistance et que $t \rightarrow \infty$, ce n'est donc pas un condensateur. C'est l'allure de la d.d.p. aux bornes d'une inductance à travers laquelle un courant s'établit. Le dipôle est une inductance.

6. Circuit Figure 87 : En fait, si on néglige la résistance des conducteurs, la maille de charge ou de décharge du condensateur ne contient pas de résistance. Ainsi la tension aux bornes du condensateur peut varier en des temps extrêmement courts. Les fronts de montée ou de descente de la d.d.p. aux bornes du condensateur sont verticaux sur la Figure 101 :

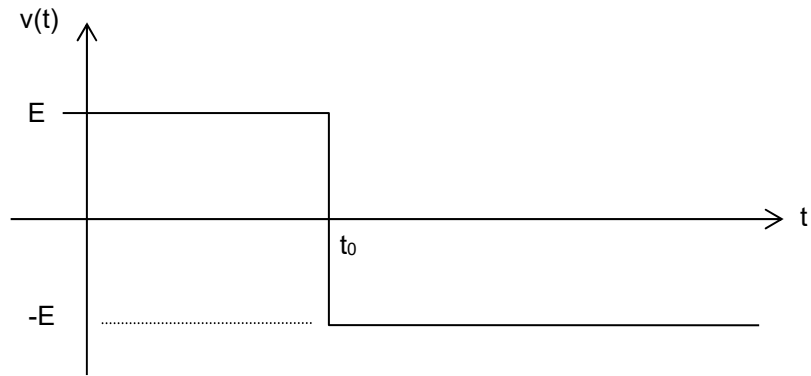


Figure 101

Circuit Figure 88 : Le circuit de charge ou de décharge comporte une résistance. L'évolution de la tension est une exponentielle, solution d'une équation différentielle du premier ordre, voir la Figure 102 :

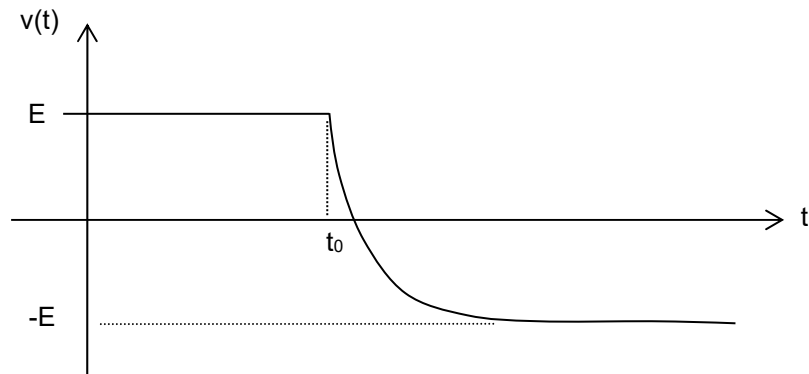


Figure 102

7. La tension observée aux bornes de R, de très faible valeur, est l'image de $i(t)$. On constate que cette tension est la dérivée² des créneaux fournis par le générateur de tension. Cela fait songer à $i = C \frac{dv}{dt}$, relation entre le courant passant dans le circuit d'alimentation d'un condensateur et $v(t)$ la d.d.p. aux bornes de ce condensateur. Ainsi le dipôle inconnu est un condensateur. Le circuit est un « dérivateur ».

8. En régime permanent, une inductance est équivalente à un fil sans résistance. L'inductance court-circuitée la résistance de 20Ω . L'intensité n'est limitée que par la résistance de 10Ω , donc : $i = \frac{40}{10} = 4 \text{ A}$.

Après l'ouverture de K, l'inductance va se décharger de son énergie magnétique $\frac{1}{2} LI^2$ et transformer celle-ci en énergie électrocinétique afin de prolonger le passage du courant en son sein.

² Les créneaux à fronts verticaux comme ceux présentés sur la Figure 89 ne sont normalement pas dérivables, car non continus. Cependant, en faisant appel aux distributions, on peut dériver ces créneaux, leur dérivée aux points de discontinuité est égale à la hauteur d'un front multiplié par la distribution de Dirac $[\delta(t)]$ et portant le signe + si le front est montant, - dans le cas contraire.

Mais la présence d'un élément dissipatif, la résistance de $20\ \Omega$ fait que le courant va retomber à 0 A au bout d'un temps égal à environ $5 \frac{L}{R} = 5 \frac{1}{40} = 125\text{ ms}$.

Immédiatement après la fermeture de K, la maille de circulation du courant est celle de la Figure 103 :

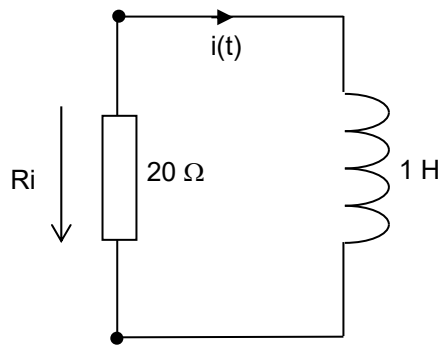


Figure 103

Le courant conserve sa valeur de 4 A juste après l'ouverture de K, créant aux bornes de la résistance de $20\ \Omega$ une d.d.p. de 80 V .

$e = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{e}{L} = -\frac{80}{1} = -80\text{ A/s}$. C'est la pente de la tangente à l'exponentielle de $i(t)$ au point t_0 correspondant à l'ouverture de K, voir Figure 104 :

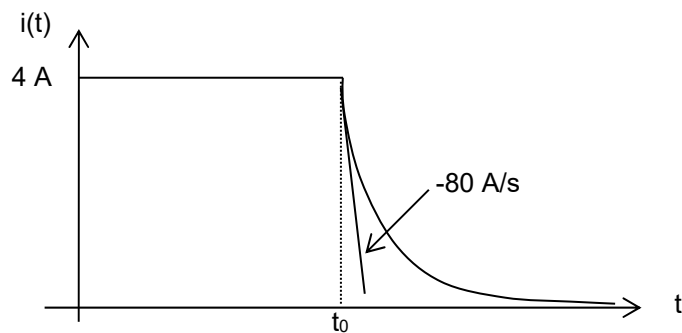


Figure 104

9. Avant la manœuvre de K, le condensateur est chargé sous la d.d.p. E. Après avoir manœuvré K, le condensateur va se décharger à travers R, voir Figure 105 :

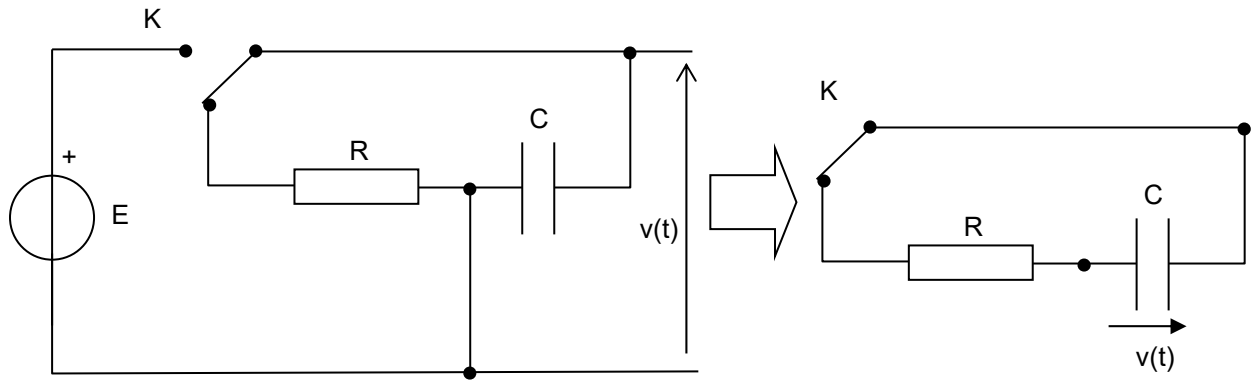


Figure 105

L'évolution de la tension $v(t)$ est donc celle d'un condensateur qui se décharge ; au bout de $5RC$, la d.d.p. aux bornes du condensateur pourra être considérée comme nulle. Voir $v(t)$ à la Figure 106 :

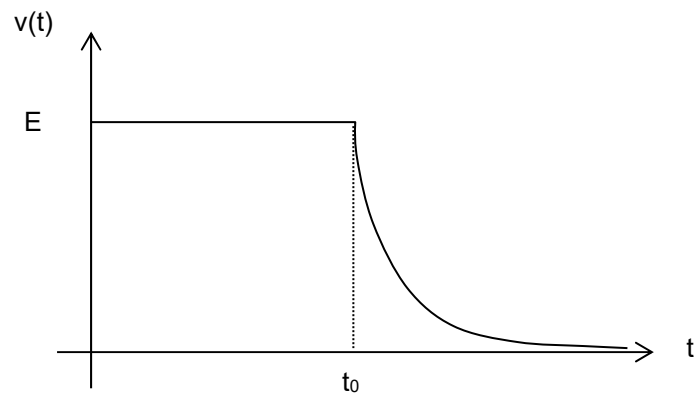


Figure 106

10. Avant la manœuvre de K le condensateur s'est chargé sous la tension 50 V, comme le montre la Figure 107 :

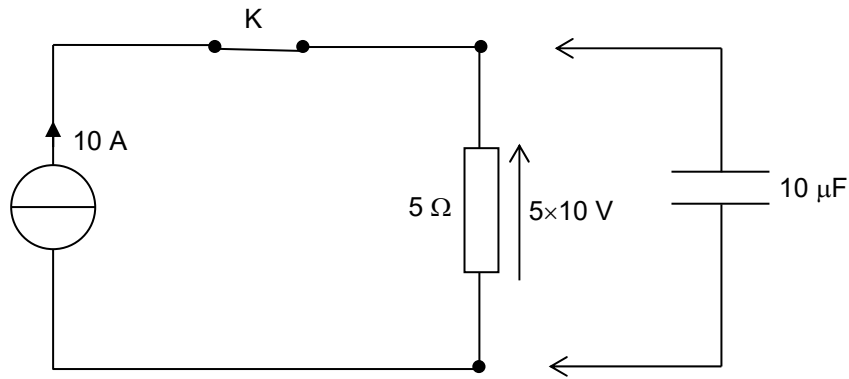


Figure 107

La Figure 108 montre la maille de décharge du condensateur juste après la manœuvre de K :

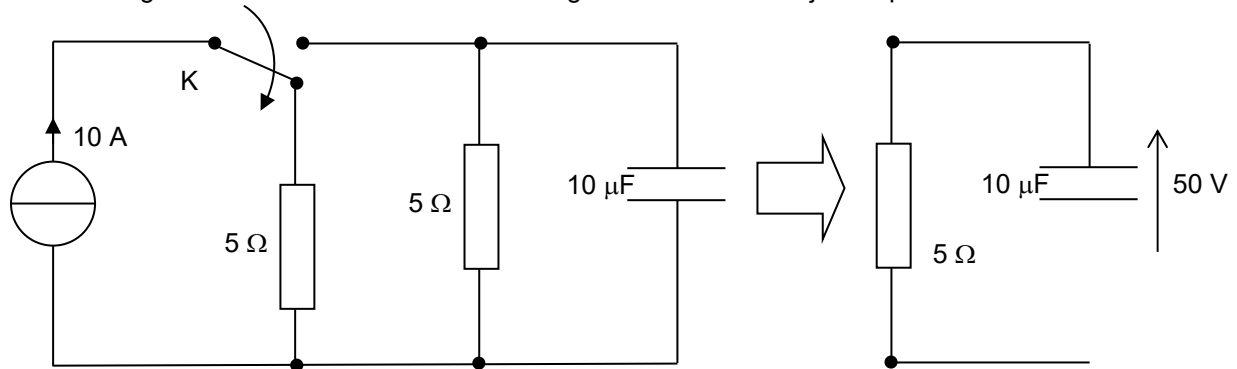


Figure 108

L'intensité du courant dans la résistance de $5\ \Omega$ est à ce moment-là : $i = \frac{50}{5} = 10\ \text{A}$.

$$q = Cv \Rightarrow \frac{dq}{dt} = i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{10}{10 \cdot 10^{-6}} = 10^6\ \text{V/s}.$$

Cette pente est négative puisque $v(t)$ décroît vers 0. Le condensateur sera déchargé au bout d'environ $5RC = 250\ \mu\text{s}$.

11. Avant l'ouverture de K, le condensateur s'est chargé sous une d.d.p. de 20 V, les deux résistances de $5\ \Omega$ formant un diviseur de tension par 2, comme l'indique la Figure 109 :

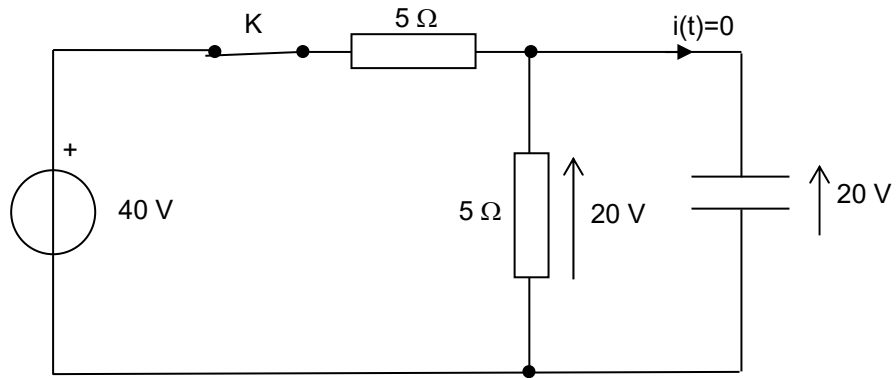


Figure 109

Après l'ouverture de K, le condensateur se décharge dans la maille indiquée Figure 110 avec une d.d.p. initiale de 20 V. l'intensité initiale de décharge du condensateur est donc de 4 A.

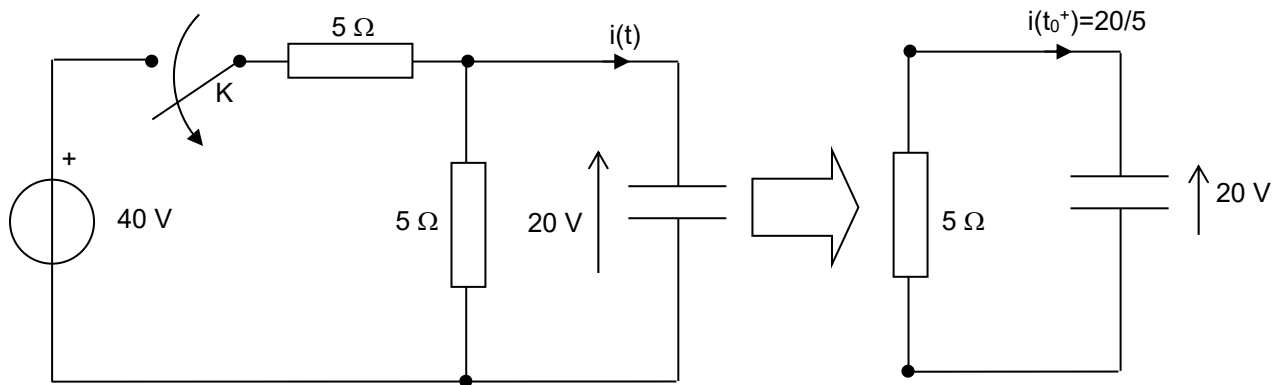


Figure 110

12. En régime permanent, l'intensité dans l'inductance, qui se comporte comme un conducteur dénué de résistance, est de $40/2 = 20$ A. Le condensateur initialement déchargé se comporte comme un court-circuit. La Figure 111 montre les circuits équivalents successifs que l'on peut construire à l'instant t_0^+ juste après la fermeture de K.

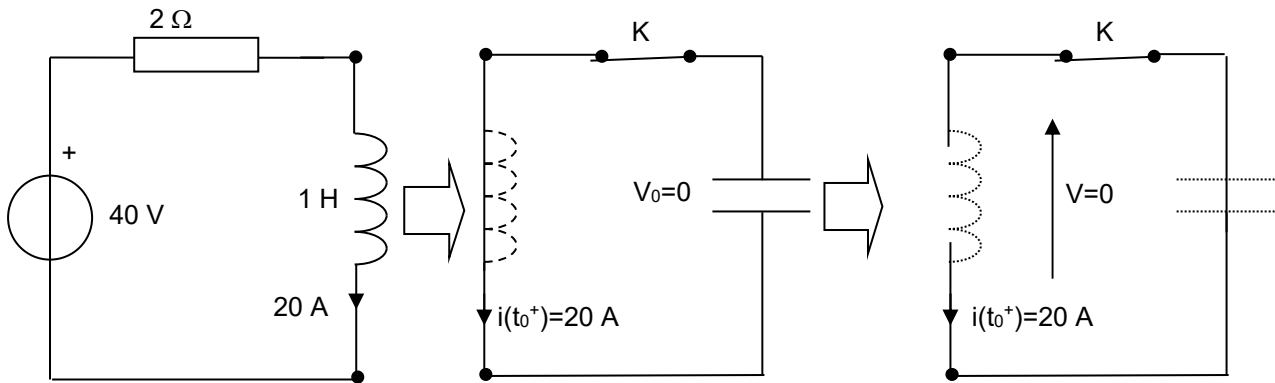


Figure 111

La d.d.p. aux bornes de l'inductance est nulle en régime permanent, elle demeure nulle après la fermeture de l'interrupteur K, le condensateur étant initialement déchargé.

13. Avant la manœuvre de K, l'intensité dans l'inductance vaut $40/10 = 4$ A. Juste après la manœuvre de K, l'inductance peut être modélisée par un générateur de courant qui maintient cette intensité constante. La d.d.p. aux bornes de l'inductance monte instantanément à $40 + 10 \times 4 = 80$ V.

Pour maintenir l'intensité à cette valeur, l'inductance transforme l'énergie magnétique qu'elle avait stockée en énergie électrocinétique. L'énergie magnétique stockée n'étant pas infinie, l'intensité prolongée par l'inductance diminue, s'annule (au bout de $5 \times \frac{L}{R} = 5 \times \frac{100 \cdot 10^{-3}}{10} = 0,5$ s) change de sens et croît exponentiellement, voir la Figure 112 :

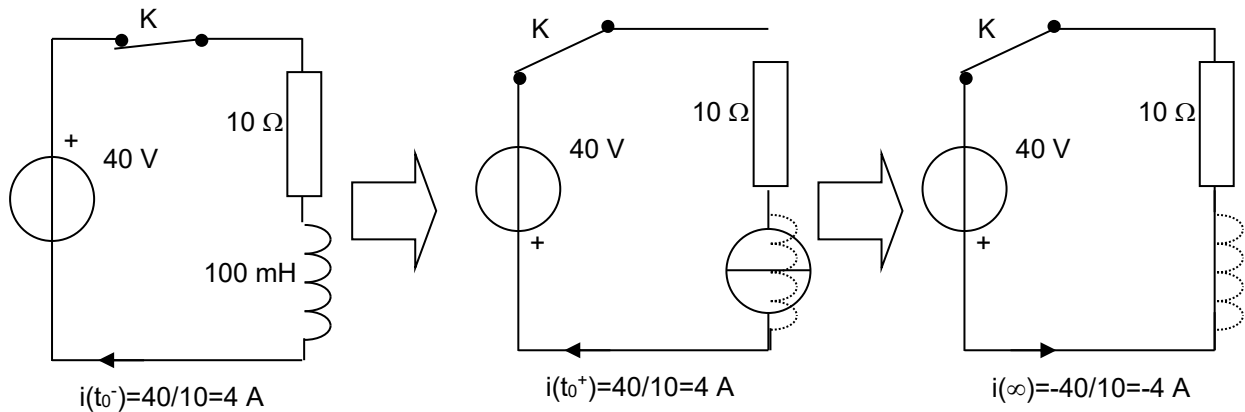


Figure 112

L'intensité dans l'inductance a donc l'allure de la Figure 113 :

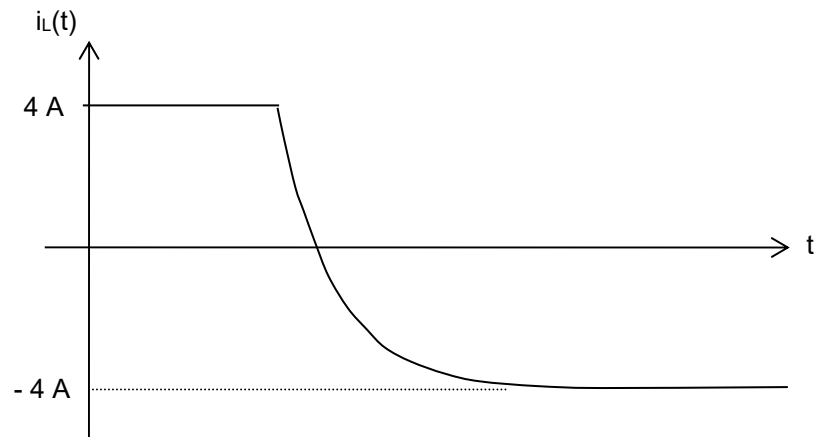


Figure 113

14. La diode de roue libre ne doit pas court-circuiter le générateur de tension lorsque K est fermé, la cathode sera donc « face au pôle plus ». La diode doit dissiper l'énergie contenue dans l'inductance lors de l'ouverture de K, elle sera donc branchée en parallèle sur l'inductance comme l'indique la Figure 114 :

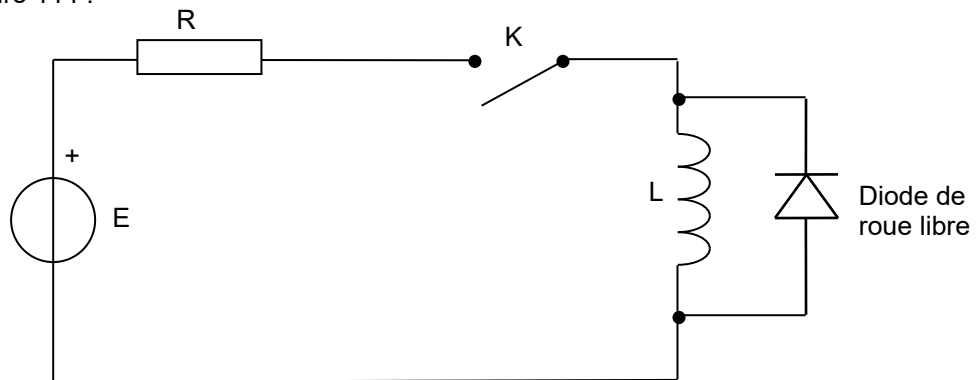


Figure 114

15. $q = Cv \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{i}{C}$. Si $v(t)$ est linéaire, alors $\frac{dv}{dt} = cte \Rightarrow \frac{i}{C} = cte \Rightarrow i = cte$.

Le générateur inconnu est donc un générateur de courant (voir Figure 115). En électronique, on emploie couramment des générateurs de courant à base de transistor bipolaire afin de générer des dents-de-scie bien rectilignes ; par exemple dans les convertisseurs analogiques numériques simple ou double rampe.

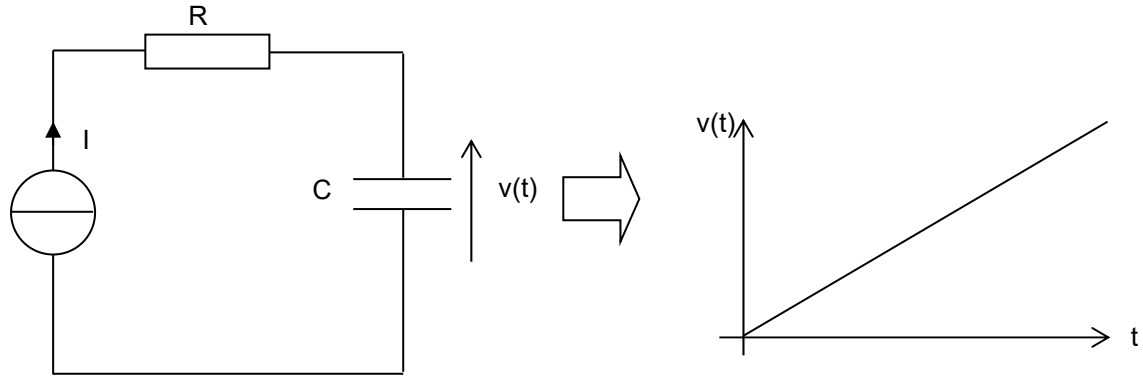


Figure 115

16. On exploite la propriété des circuits oscillants. Dans un tel circuit, l'énergie passe alternativement du condensateur à l'inductance avec une période $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

L'énergie requise pour donner une tension de 300 V à un condensateur de 100 μF est :

$$\frac{1}{2}C_2V^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \times 10^{-6} \cdot 300^2 = 4,50 \text{ J}$$

L'énergie qui est initialement dans le condensateur de 900 μF est :

$$\frac{1}{2}C_1V^2 = \frac{1}{2} \cdot 900 \times 10^{-6} \cdot 100^2 = 4,50 \text{ J}$$

Toute l'énergie qui se trouvait dans le condensateur de 900 μF doit donc être transférée au condensateur de 100 μF . On doit l'emmagasiner temporairement dans l'inducteur, en laissant l'interrupteur K_1 ouvert et en fermant l'interrupteur K_2 .

On attend que le condensateur de 900 μF soit complètement déchargé et que le courant soit maximal dans le circuit. Cela se produit à l'instant $t = T_1/4$, c'est-à-dire à un quart de la période concernée.

Puisque : $T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1} = 2\pi\sqrt{10 \cdot 900 \times 10^{-6}} = 0,596 \text{ s}$

On attend jusqu'à l'instant $t = (0,596 \text{ s})/4 = 0,149 \text{ s}$. On ferme ensuite l'interrupteur K_1 en ouvrant simultanément l'interrupteur K_2 . On attend et on laisse s'écouler un quart de la période T_2 avant d'ouvrir l'interrupteur K_1 . Le condensateur de 100 μF possède alors une charge maximale, et toute l'énergie se retrouve dans le condensateur.

Puisque $T_2 = 2\pi\sqrt{LC_2} = 2\pi\sqrt{10 \cdot 100 \times 10^{-6}} = 0,199 \text{ s}$,
on doit garder K_1 fermé pendant $(0,199 \text{ s})/4 = 0,0497 \text{ s}$.

17. Étant donné que l'on néglige la résistance du circuit, l'énergie électromagnétique du circuit se conserve lorsque l'énergie est transférée entre le champ électrique du condensateur et le champ magnétique de l'inducteur.

À chaque instant t , l'énergie du champ magnétique est reliée à l'intensité $i(t)$ traversant l'inductance par la relation : $E_L = \frac{1}{2} Li^2$. Lorsque toute l'énergie est emmagasinée sous forme

d'énergie magnétique, le courant atteint son intensité maximale $I_{\max}$, on a alors : $E_{L\max} = \frac{1}{2} LI_{\max}^2$

À chaque instant t , l'énergie du champ électrique (dans le diélectrique entre les armatures du condensateur) est reliée à la charge q portée par chaque armature par : $E_C = \frac{q^2}{2C}$.

Lorsque toute l'énergie est emmagasinée sous forme d'énergie électrostatique, la charge atteint sa valeur maximale $Q_{\max}$. Cette énergie est $E_{C\max} = \frac{Q_{\max}^2}{2C}$.

La conservation de l'énergie peut s'écrire :

$$E_{L\max} = E_{C\max} \Rightarrow \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{Q_{\max}^2}{2C} \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{Q_{\max}^2}{LC}}$$

On connaît L et C , mais pas $Q_{\max}$. Mais on sait qu'à l'instant initial où le condensateur a été chargé sous sa d.d.p. maximum, on avait : $q = C \cdot v \Rightarrow Q_{\max} = C \cdot V_{\max} = 20 \times 10^{-6} \cdot 100 = 2 \text{ mC}$.

Ou encore, en remplaçant q par $C \cdot v$:

$$I_{\max} = V_{\max} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{20 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-3}}} = 4,47 \text{ A}$$

Énergie dans un condensateur ou une inductance

6. Énergie consommée par un circuit RC en régime transitoire **

Dans le montage de la figure 5.11, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Calculer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, ainsi que le courant $i(t)$ qui circule dans le circuit.

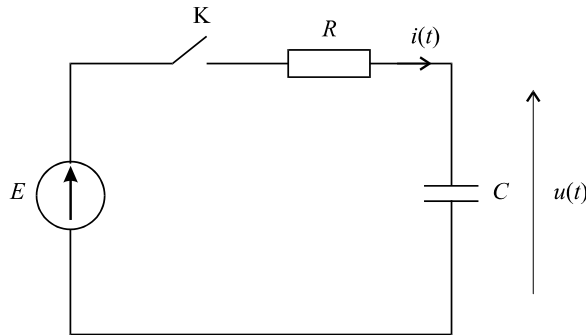


Figure 5.11

Calculer la puissance instantanée $p_C(t)$ consommée dans le condensateur. En déduire l'énergie totale W_C qu'il aura emmagasinée pendant toute la durée du régime transitoire (de $t = 0$ à $+\infty$). De même, calculer la puissance instantanée $p_R(t)$ consommée par la résistance et en déduire l'énergie totale W_R dissipée par la résistance sur ce même intervalle de temps, c'est-à-dire pendant toute la durée de la charge du condensateur.

Calculer l'énergie totale W_0 fournie par le générateur et vérifier le principe de la conservation de l'énergie.

Conseil méthodologique

Il faut disposer des expressions temporelles de la tension aux bornes du condensateur et du courant qui le traverse pour évaluer la puissance instantanée qu'il consomme. On démarre donc l'exercice comme un problème classique de calcul d'un régime transitoire.

7. Énergie emmagasinée dans un condensateur **

En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que tout condensateur chargé, de capacité C et présentant une différence de potentiel V à ses bornes, possède une énergie emmagasinée

$$W = \frac{1}{2}CV^2.$$

Conseil méthodologique

Il faut disposer des résultats de l'exercice 5.6 pour démarrer cet exercice en remarquant que l'expression trouvée précédemment ne dépend pas de la résistance contenue dans le circuit de charge.

8. Énergie emmagasinée dans une association série de deux condensateurs**

Dans le circuit de la figure 5.12, déterminer les expressions de l'énergie emmagasinée dans chacun des deux condensateurs.

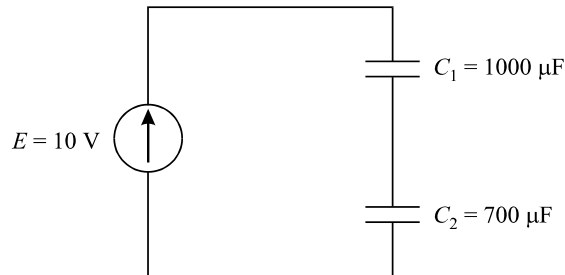


Figure 5.12

On montrera, au préalable, que les deux condensateurs possèdent la même charge Q . On supposera par ailleurs que les condensateurs étaient initialement déchargés lorsque l'on a appliqué la tension E aux bornes de l'ensemble.

Calculer l'énergie qui serait emmagasinée dans le condensateur équivalent à cette association série de C_1 et C_2 .

Conseil méthodologique

Il n'y a aucun régime transitoire dans la mise en fonctionnement du circuit. Après avoir montré qu'aucun courant ne circule dans le montage, on raisonnera sur les charges contenues sur les armatures des condensateurs.

9. Énergie emmagasinée dans une association de trois condensateurs**

Dans le schéma de la figure 5.13, déterminer les expressions de l'énergie emmagasinée dans chacun des trois condensateurs.

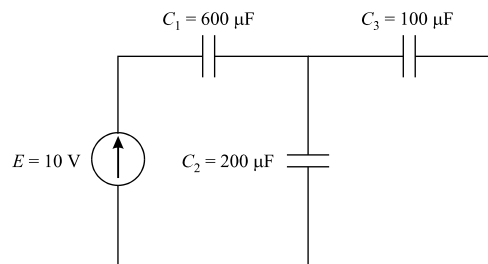


Figure 5.13

Conseil méthodologique

Il est nécessaire de connaître les tensions aux bornes de chaque condensateur pour déterminer les énergies qu'ils ont emmagasinées. Il peut être utile, dans un premier temps, de rechercher la capacité équivalente des condensateurs C_2 et C_3 pour simplifier le problème.

10. Énergie emmagasinée dans un condensateur en régime transitoire ***

Dans le circuit représenté sur la figure 5.15, alimenté par un générateur parfait de tension continue, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Calculer l'énergie totale emmagasinée par le condensateur au bout d'un temps suffisamment long pour pouvoir supposer que le régime transitoire est terminé.

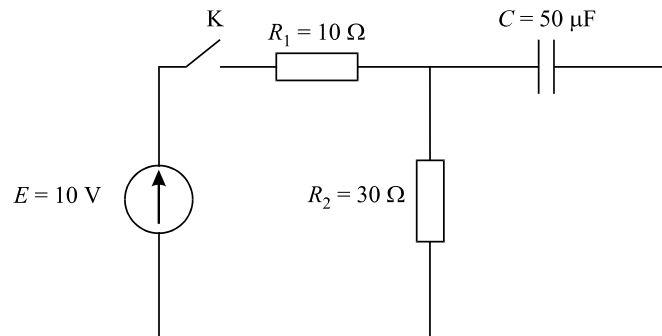


Figure 5.15

Conseil méthodologique

Il faut disposer des expressions de la tension aux bornes du condensateur et du courant qui le traverse pour calculer, par intégration, l'énergie emmagasinée. On démarre donc l'exercice comme

un problème traditionnel d'évaluation de régime transitoire. L'application de la loi des nœuds est un moyen simple de trouver rapidement l'équation différentielle qui régit le fonctionnement du circuit.

11. Énergie absorbée par une bobine en régime transitoire **

Dans le circuit représenté sur la figure 5.16, alimenté par un générateur parfait de tension continue, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Déterminer l'expression de la puissance instantanée $p_R(t)$ consommée dans la résistance R ainsi que la puissance instantanée $p_E(t)$ délivrée par le générateur. En déduire la puissance instantanée $p_L(t)$ absorbée par la bobine.

Déterminer l'énergie totale W_L absorbée par la bobine au cours du régime transitoire que l'on supposera d'une durée infinie.

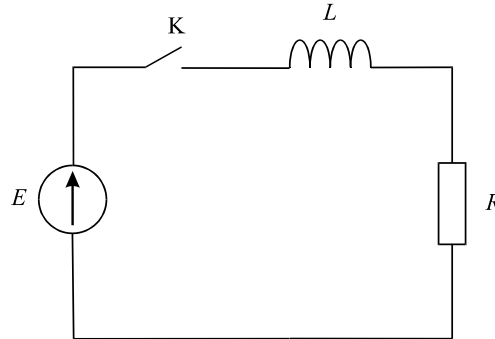


Figure 5.16

Conseil méthodologique

Il faut disposer de l'expression temporelle du courant pour déterminer les différentes puissances instantanées mises en jeu. Ce courant se calcule simplement à partir de l'équation différentielle de fonctionnement du circuit.

12. Énergie dissipée par une résistance pendant la charge de deux condensateurs ***

Dans le circuit représenté sur la figure 5.17, alimenté par un générateur parfait de tension continue, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Calculer l'énergie totale dissipée dans la résistance R durant la charge complète des deux condensateurs supposés initialement déchargés.

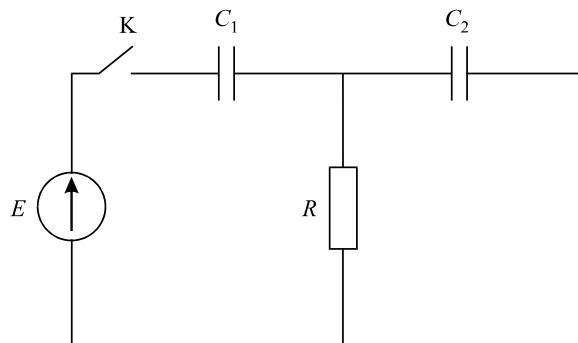


Figure 5.17

On donne : $C_1 = 1\,000\,\mu\text{F}$, $C_2 = 2\,200\,\mu\text{F}$, $E = 50\,\text{V}$.

Conseil méthodologique

La connaissance de la tension aux bornes de la résistance est nécessaire pour déterminer le résultat attendu. On cherchera donc, à partir de la loi des nœuds, à mettre en évidence l'équation différentielle de fonctionnement de ce circuit dont la solution est cette tension.

Réponses

6. La loi des mailles appliquée dans l'unique maille du circuit nous donne :

$$E = Ri(t) + u(t)$$

Or :
$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

Le circuit est donc le siège d'un régime transitoire qui est régi par l'équation différentielle :

$$E = RC \frac{du}{dt} + u(t)$$

Cette équation admet pour solution :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

On obtient donc immédiatement :

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = CE \frac{d}{dt} \left(-e^{-\frac{t}{RC}} \right) = CE \times \frac{1}{RC} \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

Soit :
$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

La puissance instantanée consommée par le condensateur est égale, par définition à :

$$p_C(t) = u(t)i(t)$$

Soit :
$$p_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \times \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}} \right)$$

L'énergie totale emmagasinée dans le condensateur durant sa charge (en théorie de $t = 0$ à $+\infty$) est donnée par la relation :

$$W_C = \int_0^{+\infty} p_C(t) dt$$

D'où :
$$W_C = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}} \right) dt = \frac{E^2}{R} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt \right)$$

Soit :
$$W_C = \frac{E^2}{R} \left(\left[\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{-\frac{1}{RC}} \right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\frac{2t}{RC}}}{-\frac{2}{RC}} \right]_0^{+\infty} \right)$$

Finalement :
$$W_C = \frac{E^2}{R} \left(RC - \frac{RC}{2} \right) = \frac{1}{2} CE^2$$

Calculons à présent la puissance instantanée consommée par R :

$$p_R(t) = Ri^2(t) = R \times \frac{E^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

Comme précédemment, l'énergie totale dissipée dans la résistance s'obtient en intégrant cette puissance instantanée de $t = 0$ à $+\infty$:

$$W_R = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{E^2}{R} \left[\frac{e^{-\frac{2t}{RC}}}{-\frac{2}{RC}} \right]_0^{+\infty} = \frac{E^2}{R} \times \frac{RC}{2}$$

Soit :
$$W_R = \frac{1}{2}CE^2$$

Calculons pour finir l'énergie totale délivrée par le générateur :

$$W_0 = \int_0^{+\infty} p_0(t) dt$$

$p_0(t)$ représentant la puissance instantanée fournie par le générateur.

Cette puissance instantanée est égale au produit de la tension délivrée par le générateur et du courant qui le traverse. On a donc :

D'où :
$$W_0 = \int_0^{+\infty} E i(t) dt = E \int_0^{+\infty} \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt$$

Soit :
$$W_0 = \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt = \frac{E^2}{R} \left[\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{-\frac{1}{RC}} \right]_0^{+\infty} = \frac{E^2}{R} \times RC = CE^2$$

Le principe de la conservation de l'énergie est bien vérifié, puisque :

$$W_0 = CE^2 = W_R + W_C = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Même en régime transitoire, le principe de la conservation de l'énergie s'applique de manière inconditionnelle. On retiendra également de cet exercice que la méthode standard de calculs d'énergies emmagasinées, fournies ou dissipées en régime transitoire passe par le calcul des puissances instantanées mises en jeu.

7. L'exercice précédent décrit la charge d'un condensateur au travers d'une résistance R . Le résultat trouvé est indépendant de R et montre que tout condensateur de capacité C , chargé à l'aide d'un générateur de tension E , emmagasine au cours de sa charge, une énergie égale à $W = \frac{1}{2}CE^2$. Une fois chargé, le condensateur présente à ses bornes une différence de potentiel égale à E , ceci indépendamment de la manière dont la charge s'est effectuée. Ceci est la preuve que l'énergie emmagasinée ne dépend que de la tension aux bornes du condensateur et de la valeur de sa capacité, ce qui est d'ailleurs suggéré par l'expression trouvée dans l'exercice précédent.

En conclusion, tout condensateur chargé, de capacité C et présentant une différence de potentiel V à ses bornes, possède une énergie emmagasinée $W = \frac{1}{2}CV^2$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le résultat démontré dans cet exercice est très important : cette expression traduit la relation existant entre l'énergie emmagasinée dans un condensateur et sa charge, puisque celle-ci dépend de V :

$$Q = CV \Rightarrow V = \frac{Q}{C} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

8. L'énoncé ne faisant pas état d'un quelconque régime transitoire, on suppose bien entendu que le circuit de la figure 5.12 fonctionne en régime continu. Aucun courant ne peut donc circuler dans le circuit. Les deux condensateurs sont chargés et présentent à leurs bornes des tensions respectives U_1 et U_2 (figure 5.29). Comme le circuit n'est plus le siège d'aucun mouvement de charge et que les condensateurs sont supposés initialement déchargés, la charge totale contenue sur l'armature négative de C_1 et sur l'armature positive de C_2 reste nulle.

On a donc :
$$-Q_1 + Q_2 = 0$$

D'où :
$$C_1 U_1 = C_2 U_2$$

Il nous faut chercher ces deux tensions U_1 et U_2 afin de déterminer l'énergie emmagasinée dans chaque condensateur.

Il nous suffit d'une seule autre équation contenant U_1 et U_2 :

$$U_1 + U_2 = E$$

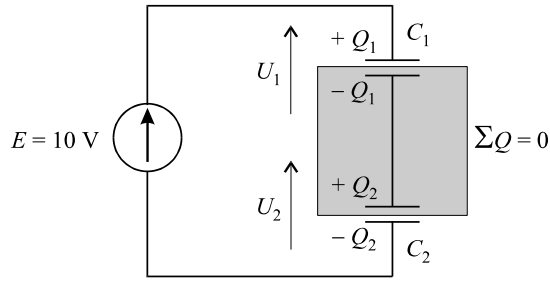


Figure 5.29

D'où par exemple :

$$U_1 + \frac{C_1}{C_2} U_1 = E \Rightarrow U_1 = \frac{E}{1 + \frac{C_1}{C_2}}$$

Soit :

$$U_1 = \frac{C_2 E}{C_1 + C_2}$$

Puis :

$$U_2 = \frac{C_1}{C_2} U_1 = \frac{C_1 E}{C_1 + C_2}$$

On en déduit les expressions des énergies emmagasinées dans C_1 et C_2 , soit W_1 et W_2 :

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} C_1 \times \left(\frac{C_2 E}{C_1 + C_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{C_1 C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} \right] E^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2} C_2 \times \left(\frac{C_1 E}{C_1 + C_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{C_2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \right] E^2$$

Application numérique :

$$W_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{10^{-3} \times 700^2 \times 10^{-12}}{1700^2 \times 10^{-12}} \right] \times 10^2 = 8,5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{700 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{1700^2 \times 10^{-12}} \right] \times 10^2 = 12,1 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Calculons à présent l'énergie qui serait emmagasinée dans un condensateur C équivalent à l'association série de C_1 et de C_2 .

On a :

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10^{-3} \times 700 \times 10^{-6}}{1700 \times 10^{-6}} = 412 \mu\text{F}$$

L'énergie W emmagasinée dans un tel condensateur aux bornes duquel une tension E est appliquée vaut :

$$W = \frac{1}{2} C E^2 = \frac{1}{2} \times 412 \times 10^{-6} \times 10^2 = 20,6 \times 10^{-3} \text{ J}$$

On a bien :

$$W = W_1 + W_2$$

Vérifions littéralement cette égalité :

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{C_1 C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} \right] E^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{C_2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \right] E^2$$

Soit, après avoir mis E^2 en facteur :

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1 C_2^2 + C_2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \right) \times E^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)^2} \right) \times E^2$$

Après simplifications, on obtient :

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \times E^2 = \frac{1}{2} C E^2 = W$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans le calcul d'énergies impliquées dans des associations de condensateurs, il est toujours préférable de raisonner sur les charges. Même dans cet exemple assez simple, c'est le moyen le plus rapide de mettre en équation les quantités d'énergie emmagasinées.

9. Le calcul de l'énergie emmagasinée dans chaque condensateur est subordonné à la connaissance des différences de potentiel aux bornes de chacun d'entre eux. Ainsi, on remarque sur la figure 5.30, que la même tension U_2 règne aux bornes de C_2 et C_3 .

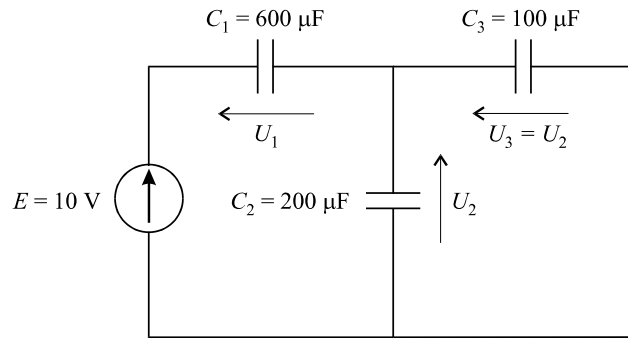


Figure 5.30

Soit C_{23} la capacité équivalente à l'association parallèle de ces deux condensateurs (figure 5.31). Dans cette figure, les deux condensateurs C_{23} et C_1 possèdent la même charge (voir exercice précédent : figure 5.29). On a donc :

$$C_1 U_1 = C_{23} U_2$$

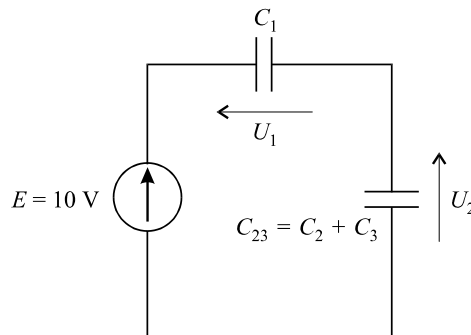


Figure 5.31

De plus :

$$E = U_1 + U_2$$

D'où :

$$E = U_1 + \frac{C_1}{C_{23}} U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{C_{23}}{C_1 + C_{23}} E$$

De même :

$$U_2 = \frac{C_1}{C_{23}} U_1 \Rightarrow U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_{23}} E$$

On en déduit alors les expressions de l'énergie emmagasinée dans chacun des trois condensateurs :

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1 U_1^2 = \frac{1}{2}C_1 \left(\frac{C_{23}}{C_1 + C_{23}} \right)^2 \times E^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2}C_2 U_2^2 = \frac{1}{2}C_2 \left(\frac{C_1}{C_1 + C_{23}} \right)^2 \times E^2$$

$$W_3 = \frac{1}{2}C_3 U_2^2 = \frac{1}{2}C_3 \left(\frac{C_1}{C_1 + C_{23}} \right)^2 \times E^2$$

Application numérique :

$$C_{23} = 300 \mu\text{F}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \times 600 \times 10^{-6} \times \left(\frac{300 \times 10^{-6}}{900 \times 10^{-6}} \right)^2 \times 30^2 = 3 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-6} \times \left(\frac{600 \times 10^{-6}}{900 \times 10^{-6}} \right)^2 \times 30^2 = 4 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \times \left(\frac{600 \times 10^{-6}}{900 \times 10^{-6}} \right)^2 \times 30^2 = 2 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La même conclusion que pour l'exercice précédent s'impose : dans le calcul d'énergies impliquées dans des associations de condensateurs, il est toujours préférable de raisonner sur les charges. La présence de trois condensateurs nous pousse ici à rechercher des équivalences et à procéder par simplification du circuit.

- 10.** Nommons les différents courants présents dans ce circuit et appelons $u(t)$ la tension aux bornes de C qui se trouve être également la tension aux bornes de R_2 (figure 5.34).

L'énergie totale W emmagasinée dans le condensateur au cours du régime transitoire correspond à l'intégrale de la puissance instantanée $p(t)$ absorbée par celui-ci, entre l'instant 0 correspondant à la fermeture de l'interrupteur et $+\infty$ puisqu'en théorie, le régime transitoire possède une durée infinie.

On a donc :

$$W = \int_0^{+\infty} u(t)i(t)dt$$

Il nous faut donc déterminer les deux grandeurs $u(t)$ et $i(t)$.

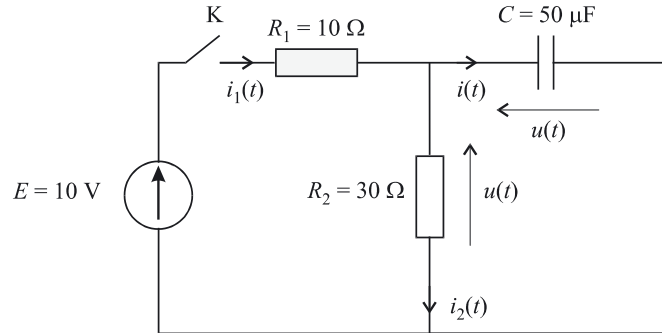


Figure 5.34

La loi des nœuds appliquée au circuit nous donne :

$$i_1(t) = i_2(t) + i(t)$$

Exprimons ces courants en fonction des tensions E et $u(t)$:

$$E - u(t) = R_1 i_1(t) \Rightarrow i_1(t) = \frac{E - u(t)}{R_1}$$

$$i_2(t) = \frac{u(t)}{R_2}$$

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

L'équation de la loi des nœuds se transforme donc en l'équation différentielle qui régit ce régime transitoire :

$$\frac{E - u(t)}{R_1} = \frac{u(t)}{R_2} + C \frac{du}{dt}$$

Soit :

$$\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \frac{du}{dt} + u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

On en déduit l'expression de $i(t)$:

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{R_2 C E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit :

$$i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Calculons à présent l'énergie emmagasinée dans le condensateur :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{+\infty} u(t) i(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \times \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} dt \\ W &= \frac{E^2 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} \times \left[\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \right] \\ W &= \frac{E^2 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} \times \left(\left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{-\frac{1}{\tau}} \right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}}{-\frac{2}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \right) = \frac{E^2 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} \times \left(\tau - \frac{\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

Soit en remplaçant τ par son expression :

$$W = \frac{E^2 R_2 \tau}{2R_1(R_1 + R_2)} = \frac{E^2 R_2}{2R_1(R_1 + R_2)} \times \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

D'où :

$$W = \frac{E^2 R_2^2 C}{2(R_1 + R_2)^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Destiné à s'entraîner au calcul d'énergie, cet exercice montre qu'il est nécessaire de bien maîtriser le calcul intégral pour obtenir les résultats recherchés. On notera que la présence de deux résistances dans le circuit de charge ne complique pas les calculs outre mesure.

- 11.** Soit $i(t)$ le courant circulant dans le circuit. Plaçons les différentes tensions aux bornes des dipôles (figure 5.35).

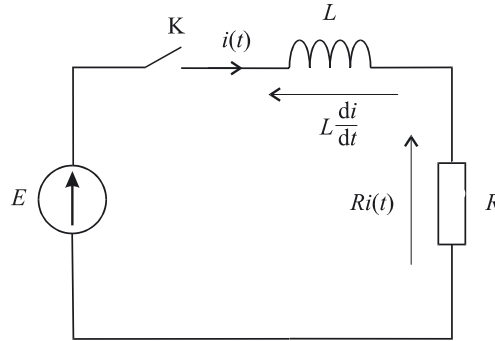


Figure 5.35

La loi des mailles nous donne immédiatement :

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri(t)$$

Soit :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

avec :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Calculons la puissance instantanée dissipée dans la résistance R :

$$p_R(t) = Ri^2(t) = \frac{E^2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^2$$

La puissance instantanée fournie par le générateur est :

$$p_E(t) = Ei(t) = \frac{E^2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Quant à la puissance instantanée absorbée par la bobine, elle s'obtient facilement en considérant le principe de conservation de la puissance :

$$p_E(t) = p_R(t) + p_L(t) \Rightarrow p_L(t) = p_E(t) - p_R(t)$$

D'où :

$$p_L(t) = \frac{E^2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - \frac{E^2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^2$$

Soit :

$$p_L(t) = \frac{E^2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}})$$

$$p_L(t) = \frac{E^2}{R} (e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}})$$

L'énergie totale absorbée par la bobine au cours du régime transitoire se calcule en intégrant $p_L(t)$ de 0 à $+\infty$ puisque le régime transitoire, en théorie, du moins, possède une durée infinie.

$$W_L = \int_0^{+\infty} p_L(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} (e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}) dt$$

$$W_L = \frac{E^2}{R} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \right) = \frac{E^2}{R} \left(\left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{-\frac{1}{\tau}} \right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}}{-\frac{2}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \right)$$

D'où :

$$W_L = \frac{E^2}{R} \left(\tau - \frac{\tau}{2} \right) = \frac{E^2}{R} \times \frac{\tau}{2} = \frac{LE^2}{2R^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On remarquera que l'expression de l'énergie emmagasinée dans une bobine dépend de la résistance utilisée dans le circuit de charge. Il peut également être intéressant de constater l'homogénéité de l'expression.

12. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit et plaçons les tensions aux bornes de chaque dipôle comme cela est indiqué sur la figure 5.36.

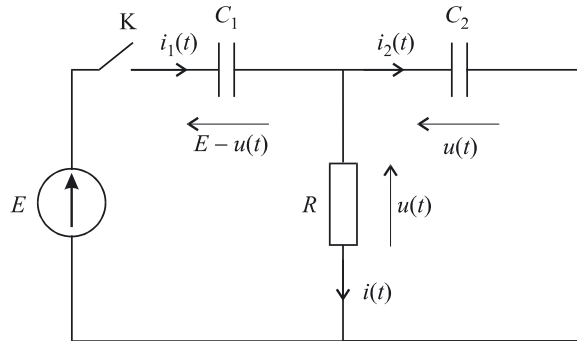


Figure 5.36

La tension $u(t)$ étant nécessaire pour déterminer la puissance instantanée dissipée dans R , donc l'énergie totale qu'elle consomme, nous recherchons l'équation différentielle dont la solution est cette différence de potentiel $u(t)$.

La loi des nœuds appliquée au circuit nous donne :

$$i_1(t) = i(t) + i_2(t)$$

Exprimons ces trois courants en fonction de $u(t)$. Les équations de fonctionnement des deux condensateurs permettent de déterminer deux de ces courants. En effet :

$$i_1(t) = C_1 \frac{d}{dt} (E - u(t)) = -C_1 \frac{du}{dt}$$

et :

$$i_2(t) = C_2 \frac{du}{dt}$$

Par ailleurs, la loi d'Ohm aux bornes de la résistance nous donne :

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

D'où :

$$-C_1 \frac{du}{dt} = \frac{u(t)}{R} + C_2 \frac{du}{dt}$$

Soit :

$$R(C_1 + C_2) \frac{du}{dt} + u(t) = 0$$

Cette équation admet pour solution :

$$u(t) = E \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = R(C_1 + C_2)$$

La puissance instantanée dissipée dans la résistance est donc :

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

On en déduit l'énergie totale consommée par la résistance en intégrant $p(t)$ de 0 à $+\infty$ (le régime transitoire possédant en théorie une durée infinie). Par définition :

$$W = \int_0^{+\infty} p(t) dt$$

Soit en remplaçant la puissance instantanée par son expression :

$$W = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$W = \frac{E^2}{R} \left[\frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}}{-\frac{2}{\tau}} \right]_0^{+\infty}$$

D'où :

$$W = \frac{E^2}{R} \times \frac{\tau}{2}$$

Remplaçons τ par sa valeur :

$$W = \frac{E^2 R (C_1 + C_2)}{2R} = \frac{E^2 (C_1 + C_2)}{2}$$

Application numérique :

$$W = \frac{50^2 \times (3\,200 \times 10^{-6})}{2} = 4 \text{ J}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Une fois déterminée l'équation différentielle régissant le fonctionnement du circuit, il suffit de calculer l'intégrale de la puissance instantanée dissipée dans la résistance pour en déduire l'énergie totale qu'elle consomme.

