

Électrocinétique alternatif monophasé

Cours

CLAUDE CHEVASSU

Table des matières

1 Régimes sinusoïdaux monophasés	1
1.1 Introduction	1
1.1.1 Régimes non sinusoïdaux	1
1.2 Grandeurs électriques en régimes sinusoïdaux	2
1.2.1 Écriture mathématique et caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale	2
1.2.2 Représentation en fonction de l'angle $\theta = \omega t$	2
1.3 Valeur efficace	3
1.3.1 Non pertinence de la valeur moyenne	3
1.3.2 Valeur efficace d'un courant	4
1.3.3 Valeur efficace d'une tension	5
1.3.4 Cas particulier des régimes sinusoïdaux	5
1.4 Déphasage entre deux signaux	6
1.4.1 Définition	6
1.4.2 Détermination	6
1.5 Rappels sur les nombres complexes	8
1.5.1 Vecteur de Fresnel	8
1.6 Transformation cissoïdale - Phaseur	9
1.6.1 Notation de Steinmetz	10
1.6.2 Phaseur	11
1.6.3 Dérivation ou intégration par rapport au temps	12
1.7 Dipôles R, L ou C en régime sinusoïdal forcé	13
1.7.1 Régime forcé	13
1.7.2 Étude du dipôle R	13
1.7.3 Étude du dipôle L	14
1.7.4 Étude du dipôle C	17
1.8 Impédance et admittance	18
1.8.1 Exemples	21
1.9 Équation des mailles en alternatif	22
1.10 Régime sinusoïdal forcé	23
1.10.1 Obtention du régime permanent à l'aide de la notation complexe	23
1.11 Loi d'Ohm généralisée	24
1.12 Vecteurs de Fresnel	24
1.12.1 Circuit série	25
1.12.2 Circuit parallèle	26
1.13 Loi des mailles, loi des noeuds	27
1.13.1 Exemple	27
1.14 Exercices	29

1.14.1	Vecteurs de Fresnel de la tension, du courant et de l'impédance d'un circuit capacitif	29
1.14.2	Vecteurs de Fresnel de la tension, du courant et de l'impédance d'un circuit inductif	29
1.14.3	Circuit à deux branches en parallèle	29
1.14.4	Calcul de la fréquence d'alimentation et de l'angle de déphasage	30
1.14.5	Calcul d'une réactance	30
1.14.6	Calcul d'une fréquence pour arriver à un déphasage donné	30
1.14.7	Calcul d'une résistance, C et φ donnés	30
1.15	Corrigés des exercices	31
1.15.1	corrigé de l'exercice 1.14.1 page 29	31
1.15.2	Corrigé de l'exercice 1.14.2 page 29	32
1.15.3	Corrigé de l'exercice 1.14.3 page 29	34
1.15.4	Corrigé de l'exercice 1.14.4 page 30	34
1.15.5	Corrigé de l'exercice 1.14.5 page 30	35
1.15.6	Corrigé de l'exercice 1.14.6 page 30	36
1.15.7	Corrigé de l'exercice 1.14.7 page 30	36
2	Puissance en alternatif monophasé	39
2.1	Puissances échangées en opposition de phase	39
2.2	Puissance en régime alternatif monophasé	40
2.2.1	Expression de la puissance en fonction de R et de X	43
2.3	Les différentes puissances et leurs formules	44
2.3.1	Puissance active	44
2.3.2	Puissance réactive	45
2.3.3	Puissance apparente	45
2.3.4	Puissance complexe	46
2.3.5	Puissance fluctuante	47
2.3.6	Formules des puissances	48
2.3.7	Exemple d'emploi des formules de calcul de puissance	48
2.4	Théorème de Boucherot	49
2.4.1	Vérification, démonstration du théorème de Boucherot	50
2.5	Composantes active et réactive de la puissance	51
2.5.1	Facteur de puissance	53
2.5.2	Amélioration du facteur de puissance	54
2.5.3	Calcul d'une batterie de condensateurs destinée à la compensation	54

Chapitre 1

Régimes sinusoïdaux monophasés

1.1 Introduction

Pourquoi l'industrie a-t-elle choisi de produire des ondes alternatives sinusoïdales plutôt que des ondes carrées, triangulaires ou autres ? Voici quelques éléments de réponse :

- Dans les machines à courant alternatif, c'est l'onde sinusoïdale de tension qui occasionne le moins de pertes. Le rendement est donc meilleur ;
- une onde sinusoïdale de tension ou de courant produit moins d'interférences, de parasites (bruit) sur les lignes téléphoniques passant à proximité où dans des dispositifs électroniques voisins ;
- dans les circuits à courant alternatif, une tension sinusoïdale produit un courant sinusoïdal et vice-versa. C'est la seule onde possédant cette propriété de « reproduction » ;
- dans les moteurs électriques, un flux variant sinusoïdalement produit moins de bruit. De plus, le couple moteur est plus régulier.

1.1.1 Régimes non sinusoïdaux

La décomposition en série de Fourier permet de décomposer toute fonction périodique en une somme de fonctions sinusoïdales de périodes $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots, \frac{T}{n}$.

$$f(t) = A_0 + \sum_1^n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Par conséquent, on peut ramener l'étude d'un circuit parcouru par un courant périodique de forme quelconque à celle de ce circuit parcouru par des courants alternatifs sinusoïdaux individuels. En vertu de l'application du théorème de superposition des états électriques, il suffira ensuite d'en faire la somme sur un nombre de termes d'autant plus grand que la précision recherchée sera élevée.

Tout régime non sinusoïdal pourra donc être étudié par le biais d'une somme suffisante de régimes sinusoïdaux. On pourra se convaincre de cela en « jouant » [avec ce logiciel](#) qu'il faudra décompresser avant usage.

1.2 Grandeurs électriques en régimes sinusoïdaux

1.2.1 Écriture mathématique et caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

Les circuits que nous allons étudier seront soumis à une tension sinusoïdale de la forme :

$$v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

où V_{max} est l'amplitude, ω la pulsation et φ la phase à l'origine de la grandeur. Les relations entre la pulsation, la période et la fréquence sont :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T}$$

Graphiquement, on peut représenter cette fonction comme sur la figure 1.1 de la présente page. Sur la figure 1.1, le signal vérifie $v(t=0) = 0$ et on a nécessairement $\varphi = 0$.

Remarque : On peut de la même façon utiliser une fonction cosinus plutôt qu'une fonction sinus pour décrire un signal sinusoïdal. Si on écrit $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ alors pour la figure 1.1 de la présente page, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

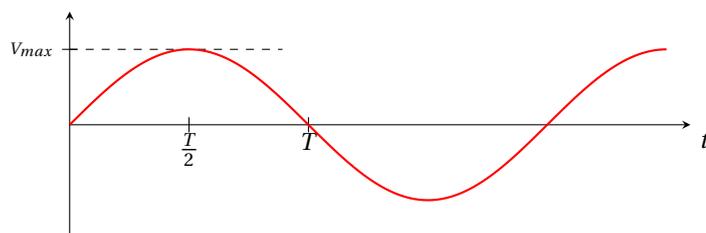


FIGURE 1.1 – Phase à l'origine nulle : $v(t) = V_{max} \sin(\omega t + 0)$

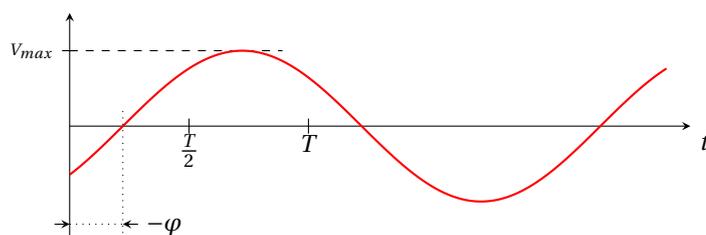
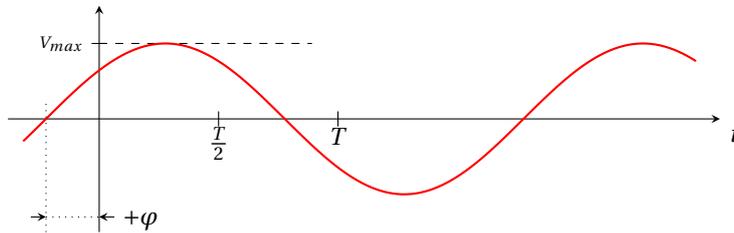


FIGURE 1.2 – Phase à l'origine négative : $v(t) = V_{max} \sin(\omega t - \varphi)$

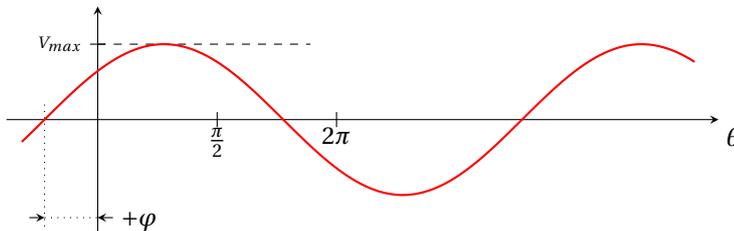
1.2.2 Représentation en fonction de l'angle $\theta = \omega t$

La valeur maximale d'une grandeur sinusoïdale $v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ apparaît naturellement sur sa représentation temporelle, la contribution de la phase à l'origine φ se traduit, en revanche, par un temps de retard à l'origine très peu pratique à

FIGURE 1.3 – Phase à l'origine positive : $v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \varphi)$

quantifier. On préfère ainsi très souvent faire la représentation des grandeurs sinusoïdales en fonction de l'angle $\theta = \omega t$ comme le montre la figure 1.4. Cela apporte les avantages suivants :

- La phase devient lisible directement en degrés ou en radians sur l'axe des abscisses ;
- la période de répétition du signal devient la valeur 2π , quelle que soit la fréquence du signal ;
- en électronique surtout, les intégrations, relatives aux valeurs moyennes et efficaces, faites en fonction de la variable θ sont plus faciles à réaliser qu'en utilisant la variable ωt .

FIGURE 1.4 – Phase à l'origine positive : $v(t) = V_{max} \sin(\theta + \varphi)$

1.3 Valeur efficace

1.3.1 Non pertinence de la valeur moyenne

Calculons la valeur moyenne d'un courant alternatif sinusoïdal :

$$\bar{I} = \int_0^T I_{\max} \sin(\omega t) dt = [-\cos t]_0^T = 0$$

Si nous introduisons cette valeur moyenne dans le calcul de la puissance d'un fer à repasser, nous trouvons $P = U\bar{I} = U \cdot 0 = 0$! Et pourtant, si nous commettons l'imprudance d'approcher notre main de la semelle du fer, nous nous apercevons vite que la puissance n'est pas nulle puisque nous venons de nous brûler !

La valeur moyenne d'une tension ou d'un courant alternatif sinusoïdal symétrique par rapport à 0 est nulle. Ces valeurs moyennes ne nous servent à rien, on ne

peut pas calculer quoique ce soit et pourtant dans le cas du fer à repasser la puissance dégagée par effet Joule, et donc la puissance électrique absorbée pour produire cette chaleur, n'est pas nulle. La valeur moyenne n'est pas une valeur pertinente si le signal est alternatif sinusoïdal et symétrique par rapport à 0.

1.3.2 Valeur efficace d'un courant

La valeur efficace permet de palier à l'insuffisance de la valeur moyenne et de permettre des calculs de puissance.

La valeur efficace est notée en lettre majuscule, par exemple le courant efficace sera noté I , la tension efficace : U ou V ou encore E .

Définition : La valeur efficace I d'une intensité $i(t)$ d'un courant variable au cours du temps de période T est égale à l'intensité du courant continu dissipant la même énergie W que $i(t)$ à travers une résistance R sur une période T .

$$W = U \cdot I \cdot T = R \cdot I^2 \cdot T = R \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) \cdot dt$$

La valeur efficace s'exprime alors comme la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période T . La dénomination anglaise RMS signifie « root mean square », soit « racine de la moyenne du carré » (ou « moyenne quadratique »).

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) \cdot dt}$$

On voit sur la figure 1.5 de la présente page que la valeur moyenne du sinus élevé au carré, courbe en rouge, ne s'annule pas. On peut donc en prendre la valeur moyenne sans craindre une valeur nulle ! La racine carrée de cette valeur moyenne constitue la valeur efficace.

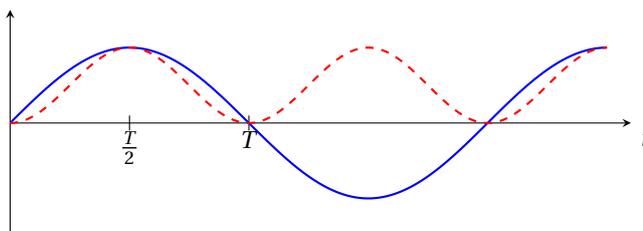


FIGURE 1.5 – Fonction sinus en bleu et son carré en pointillés rouges

Le courant efficace est un courant continu, constant dans le temps, qui produit les mêmes effets calorifiques que son équivalent alternatif. Considérons, par exemple, un four chauffé par des résistances électriques, d'une puissance maximum de 3 kW, alimenté normalement en 220 V - 50 Hz. Ce four produirait la même puissance maximale en étant alimenté par une tension continue de 220 V, il serait alors traversé par un courant continu de $3000/220 = 13,63$ A. Un voltmètre et un ampèremètre indiqueraient ces valeurs si le four était alimenté par une tension alternative de 220 V.

Remarque : Tous les ampèremètres et tous les voltmètres sont toujours gradués en valeurs efficaces.

1.3.3 Valeur efficace d'une tension

Elle est notée U .

Physiquement, c'est la valeur de la tension continue qui provoquerait une même dissipation d'énergie que la tension variable $u(t)$ si elle était appliquée aux bornes d'une résistance. Mathématiquement, elle se calcule par :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) \cdot dt}$$

Voir cette [vidéo](#) qui présente le concept de valeur efficace et qui montre comment on la calcule avec d'autres formes d'onde que la sinusoïde.

1.3.4 Cas particulier des régimes sinusoïdaux

Pour des ondes sinusoïdales, il vient :

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I_{\max}^2 \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{I_{\max}^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \\ &= \frac{I_{\max}^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t) \right] \\ &= \frac{I_{\max}^2}{2T} \left([t]_0^T - \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2} \right]_0^T \right) \\ &= \frac{I_{\max}^2}{2T} (T - 0) \\ &= \frac{I_{\max}^2}{2} \end{aligned}$$

Ce calcul ne présente que peut d'intérêt électriquement parlant, on retiendra :

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Exemple : l'électricité domestique fournie en Europe possède une valeur maximale aux alentours de 325 V, soit $U = \frac{325}{\sqrt{2}} = 230$ V.

Les appareils qui mesurent l'intensité des courants électriques se nomment *ampèremètres* et ceux qui mesurent les tensions se nomment *voltmètres*. Ces appareils fournissent uniquement des valeurs efficaces de l'intensité et de la tension et pas du tout les valeurs maximales.

1.4 Déphasage entre deux signaux

On considère toujours le déphasage entre deux signaux synchrones, c'est à dire de même fréquence. Pratiquement, le déphasage peut se mesurer à l'aide d'un oscilloscope.

1.4.1 Définition

Le déphasage est la différence de phase à l'origine des signaux étudiés. Le déphasage varie entre $-\pi$ et π et peut donc être positif ou négatif.

Si on considère par exemple le déphasage de v_1 par rapport à v_2 :

- Le déphasage est positif si v_1 est en avance par rapport à v_2 (sur un oscillogramme $v = f(t)$, le tracé représentant v_1 commence celui avant v_2);
- Le déphasage est négatif si v_1 est en retard par rapport à v_2 .

1.4.2 Détermination

Considérons la figure 1.6 :

La tension v_1 en rouge est *en avance* sur la tension v_2 en bleu, elle passe par 0 avant v_2 et cette avance est comprise entre $-\pi$ et π . Le déphasage $\Delta\varphi$ de v_1 sur v_2 est *positif*. En observant ce qui se passe juste après l'origine, on voit que la tension v_1 passe par 0 avant la tension v_2 , elle est en avance ou bien on peut dire que v_2 est en retard sur v_1 . Attention : le temps s'écoule, croît, de la gauche vers la droite sur l'axe des abscisses.

Si v_1 en rouge possède un déphasage nul comme sur la figure 1.6, elle s'écrira : $v_1 = \sin(\omega t)$ alors que v_2 s'écrira $v_2 = \sin(\omega t - \varphi)$.

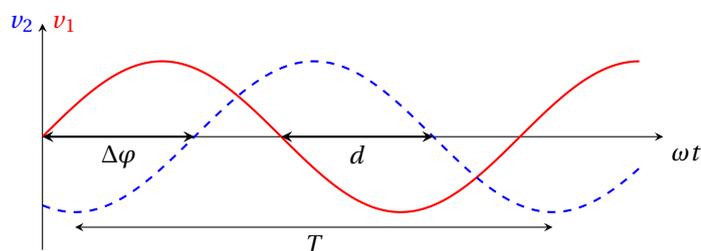


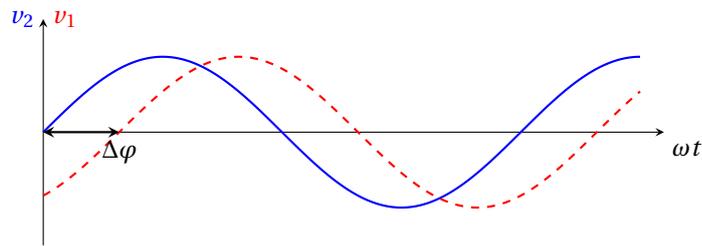
FIGURE 1.6 – Exemple de déphasage positif, v_1 est en avance sur v_2

Pour obtenir sa valeur à l'aide d'un oscillogramme, on utilise une règle de trois :

Le nombre de division T correspondant à une période des signaux correspond à un déphasage de 2π , alors le nombre de division d correspond à un déphasage de $\Delta\varphi$:

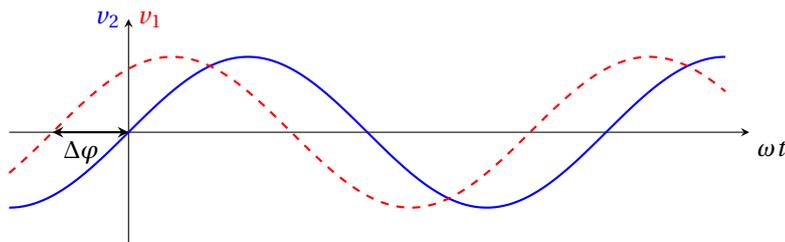
$$\Delta\varphi = \frac{d \times 2\pi}{T}$$

Considérons la figure 1.7. La tension v_1 en pointillés rouges est *en retard* sur la tension v_2 en bleu, elle passe par 0 après v_2 et ce retard est compris entre $-\pi$ et π . Le déphasage correspondant $\Delta\varphi$ de v_1 sur v_2 est *négatif*. Si v_2 possède un déphasage nul comme sur la figure 1.7, elle s'écrira : $v_2 = \sin(\omega t)$ alors que v_1 s'écrira $v_1 = \sin(\omega t - \varphi)$.

FIGURE 1.7 – Exemple de déphasage négatif, v_1 est en retard sur v_2

Sur la figure 1.8 v_1 en pointillés rouges est en avance sur v_2 d'un déphasage $\Delta\varphi$. Sur la figure 1.8, il faut mesurer le déphasage $\Delta\varphi$ entre l'instant où v_1 en rouge passe par 0 en croissant et l'instant où v_2 en bleu passe elle aussi par 0 en croissant, juste après que v_1 ait fait la même chose. On a bien : $-\pi \leq \Delta\varphi \leq +\pi$ ce qui est conforme aux valeurs que peut prendre le déphasage.

Si v_2 possède un déphasage nul comme sur la figure 1.8, elle s'écrira : $v_2 = \sin(\omega t)$ tandis que v_1 s'écrira $v_1 = \sin(\omega t + \varphi)$.

FIGURE 1.8 – Exemple de déphasage négatif, v_1 est en avance sur v_2

1.5 Rappels sur les nombres complexes

Afin d'éviter de confondre une intensité notée i et l'entité mathématiques i telle que $i^2 = -1$, on utilisera désormais à la place de i : j telle que $j^2 = -1$.

Un nombre complexe \underline{z} est un nombre de la forme $x + jy$, où x et y sont des nombres réels et $j = \sqrt{-1}$. Le premier terme x d'un nombre complexe est appelé sa partie réelle et le second terme jy sa partie imaginaire. Lorsque $x = 0$, le nombre complexe est imaginaire pur et correspond à un point de l'axe imaginaire ou encore axe j . De même, si $y = 0$, le nombre complexe est un nombre réel pur et correspond à un point de l'axe réel. Ainsi l'ensemble des nombres complexes comprend l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres imaginaires.

Rappels mathématiques :

— Un nombre complexe écrit dans sa forme cartésienne a pour expression :

$$\underline{z} = a + jb$$

Avec a la partie réelle et b la partie imaginaire, et j le nombre complexe vérifiant $j^2 = -1$.

— Le module, ou norme, de \underline{z} noté $|\underline{z}|$ a pour expression : $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

— Son argument θ est défini par : $\cos \theta = \frac{a}{|\underline{z}|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|\underline{z}|}$

ou encore $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

— Un nombre complexe écrit sous sa forme polaire a pour expression :

$$\underline{z} = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta}$$

avec $r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ son module et θ son argument.

— ce complexe \underline{z} se représente géométriquement comme le montre la figure 1.9.

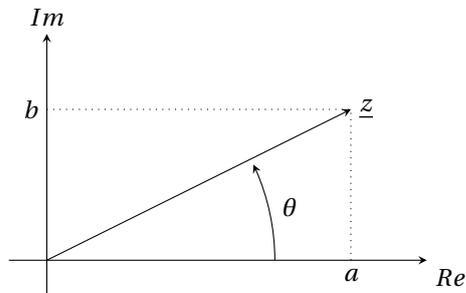


FIGURE 1.9 – Nombre complexe et plan complexe

1.5.1 Vecteur de Fresnel

Un vecteur de Fresnel est une représentation vectorielle qui permet une autre visualisation géométrique de la grandeur sinusoïdale que la représentation habituelle (1.1 page 2).

Si nous portons sur un graphique l'ensemble des points obtenus en prenant comme abscisse $x = \omega t + \varphi$ et comme ordonnée la projection de ce vecteur sur l'axe Oy : $y = \sin(\omega t + \varphi)$, nous obtenons la représentation courante d'une sinusoïde

comme celle de la figure 1.1 page 2. Ainsi, ces deux objets géométriques représentent-ils bien la même fonction mathématique. On pourra donc représenter une fonction sinusoïdale par un vecteur de longueur égale à la valeur maximale de la fonction sinus, incliné par rapport à l'axe Ox à $t = 0$ d'un angle égale à la phase à l'origine et tournant à la vitesse angulaire ω radian/s autour d'une de ses extrémités.

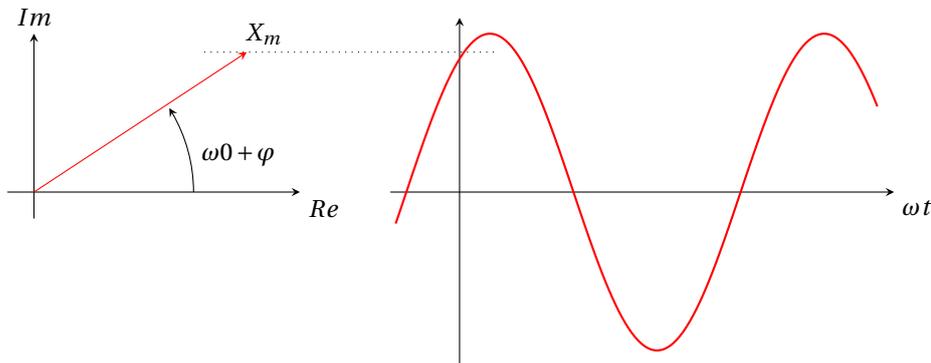


FIGURE 1.10 – Vecteur de Fresnel associé à un signal sinusoïdal. Par convention, le vecteur est représenté à $t = 0$

On peut associer un vecteur de Fresnel à une fonction sinus aussi bien qu'à une fonction cosinus. Ce vecteur de Fresnel est l'image vectorielle d'un nombre complexe : $\underline{z} = X_m (\cos(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi))$

Voir cette [vidéo](#)¹ qui illustre bien le concept de vecteur de Fresnel.

1.6 Transformation cisoïdale - Phaseur

Dans la suite de cet ouvrage, nous adoptons la convention qui consiste à souligner les variables complexes. Par exemple \underline{V} représente une tension complexe. D'ailleurs l'International Electrotechnical Commission (IEC), qui édicte les normes en la matière, préconise cette notation. On pourra consulter cette [page](#) concernant les impédances complexes.

Le but des paragraphes qui suivent n'est pas de refaire un cours de mathématiques, mais de résumer les éléments importants de l'association d'un nombre complexe à une fonction sinusoïdale réelle.

Considérons un signal sinusoïdal de pulsation ω appliqué à un système linéaire :

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

On a alors avantage à considérer la fonction $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ comme la partie imaginaire de la fonction complexe :

$$\underline{f}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

1. Cette vidéo fait partie de la chaîne Youtube [L'antre de la connaissance](#)

Lors de l'étude des circuits à courant alternatif, les représentations vectorielles sont employées pour donner une image suggestive aux phénomènes examinés, pour concrétiser un peu les choses, et pour simplifier les calculs.

1.6.1 Notation de Steinmetz

Lorsqu'on noircit des feuilles et des feuilles de calculs, il peut être très intéressant de ne pas réécrire des éléments qui sont communs à toutes les grandeurs. C'est en partant de ce principe que Steinmetz a inventé une notation plus compacte des nombres complexes qui représentent les tensions et les intensités. On ne conserve que les informations qui diffèrent d'une tension à une autre, d'un courant à un autre. Dans un même réseau électrique, la pulsation $\omega = 2\pi f$ est commune à toutes les grandeurs, tensions et intensités, aussi ce n'est pas une grandeur pertinente pour distinguer une grandeur d'une autre, on peut l'omettre.

De la même manière, seules la tension efficace ou l'intensité efficace nous intéressent. Les appareils de mesure ne donnent que des valeurs efficaces. Et lorsqu'il s'agit de faire des calculs, les formules ne mettent en jeu que des valeurs efficaces.

Nous adopterons donc une notation compacte ne conservant que les informations pertinentes, à savoir la valeur efficace et la phase à l'origine ou déphasage. On associera à une fonction sinusoïdale réelle un nombre complexe associé et ce nombre complexe sera noté sous forme polaire compacte comme suit :

$$v(t) = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow V_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)} \rightarrow \underline{V/\varphi^\circ}$$

Ou $V = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} = V_{\text{eff}}$ et ou φ° est habituellement exprimé en degrés.

Signalons qu'il existe des calculatrices qui permettent de travailler en complexe avec la même facilités que si l'on avait affaire à des nombres réels. Cela permet d'aller au bout de la démarche entreprise par Steinmetz. On citera ici la calculatrice Casio « fx-991 ES PLUS » ou encore la calculatrice de chez Texas Instrument « TI- 36X Pro ». Ces calculatrices sont bon marché, non programmables et donc admises à tous les examens et concours. Avec ces calculatrices, on peut saisir les nombres complexes sous leur notation de Steinmetz, la calculatrice se chargeant d'en faire la somme ou la différence ou bien le produit ou le quotient. Certaines calculatrices programmables permettent de travailler avec des nombres complexes sans toutefois offrir la facilité de la saisie directe en notation de Steinmetz, il faut passer par la forme exponentielle plus longue à saisir et en plus elle sont souvent interdites aux examens et concours. .

L'auteur des ces lignes se souvient du temps où pour additionner des courants alternatifs sinusoïdaux il fallait d'abord les convertir en leur forme algébrique, puis additionner séparément parties réelles et parties imaginaires puis revenir à une forme polaire. Certes, cela n'a rien de compliqué, mais c'est simplement long, fastidieux et source d'erreur ; appuyer sur une mauvaise touche, saisir un mauvais nombre est vite fait. .

La figure 1.11 page suivante montre l'affichage de l'addition de deux nombres complexes en notation de Steinmetz et le résultat. Le calcul effectué est le suivant :

$$(20/\underline{10^\circ}) + (30/\underline{-15^\circ}) = 48,86/\underline{-5,04^\circ}$$

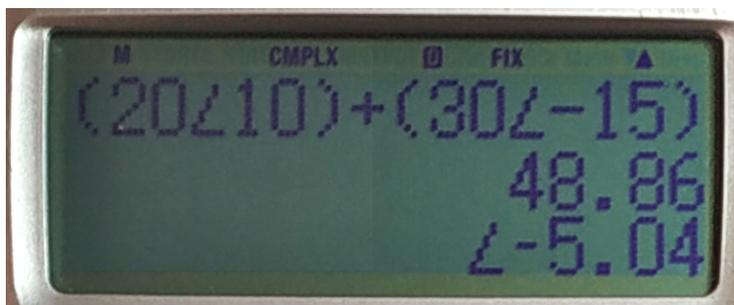


FIGURE 1.11 – Calculatrice effectuant la somme de deux nombres complexes en notation de Steinmetz

1.6.2 Phaseur

On appelle « phaseur » le nombre complexe V/φ en notation de Steinmetz associé à une tension ou I/θ celui associé à un courant.

La transformation : $i(t) \rightarrow I/\theta$ s'appelle *transformation cisoïdale*.

Afin de représenter une grandeur sinusoïdale graphiquement par un vecteur de Fresnel, un phaseur, on pourra utilement consulter les vidéos² suivantes :

- [Représenter une grandeur sinusoïdale par un vecteur de Fresnel](#)
- [addition et soustraction de grandeurs sinusoïdales](#)

1.6.2.1 exemple :

$$v(t) = 220\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow \underline{V} = 220/60^\circ \text{ V}$$

Si cette tension $v(t)$ produit l'intensité : $i(t) = 20\sqrt{2} \cos(\omega t)$, alors il faut veiller à exprimer le cos en sin afin de pouvoir comparer les phases :

$$i(t) = 20\sqrt{2} \cos(\omega t) = 20\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \underline{I} = 20/90^\circ \text{ A}$$

1.6.2.2 Phaseur associé à j

j est un nombre complexe d'amplitude 1 et d'argument 90°

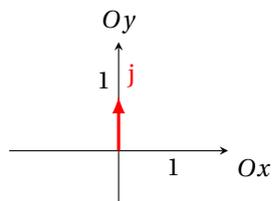


FIGURE 1.12 – Interprétation géométrique de j

2. Ces vidéos sont présentes sur la chaîne Youtube [MathLP73](#)

En notation de Steinmetz, nous avons :

$$j \rightarrow 1/90^\circ$$

Ainsi un nombre complexe \underline{I} multiplié par j verra son module inchangé, tandis que son argument sera augmenté de 90° . Le vecteur de Fresnel associé au nombre complexe $j \cdot \underline{I}$ aura tourné de 90° dans le sens trigonométrique par rapport au vecteur associé au nombre complexe \underline{I} comme le montre la figure 1.13a.

Il est évident que le vecteur de Fresnel associé au nombre complexe $-j \cdot \underline{I}$ aura tourné de -90° dans le sens opposé au sens trigonométrique par rapport au vecteur associé au nombre complexe \underline{I} comme le montre la figure 1.13b.

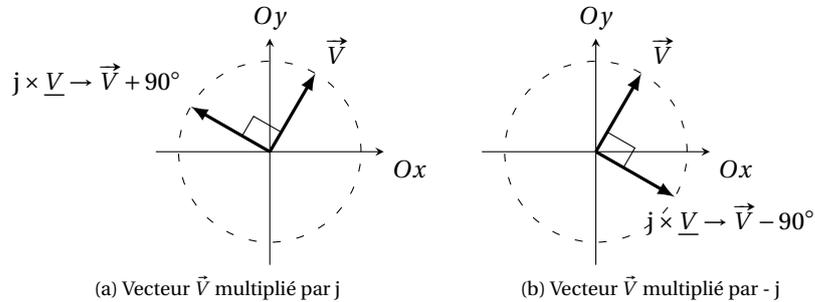


FIGURE 1.13 – Vecteur \vec{V} qui ont subis une rotation de $\pm 90^\circ$

1.6.3 Dérivation ou intégration par rapport au temps

Il est important de noter qu'une dérivation en fonction du temps équivaut dans le plan complexe à une rotation de $+90^\circ$, ou encore à la multiplication du vecteur équivaut par le terme $j\omega$. Inversement, une intégration équivaut à une rotation de -90° , ou encore à la division du vecteur équivaut par le terme $j\omega$.

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d(V_{\max} \sin(\omega t + \varphi))}{dt} &= \omega V_{\max} \cos(\omega t + \varphi) = \omega V_{\max} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \rightarrow \frac{dV}{dt} &= \frac{d(V/\varphi)}{dt} = \omega (V/\varphi + 90^\circ) = j\omega \underline{V} \end{aligned}$$

Un calcul analogue permet d'établir le résultat de l'intégration.

On retiendra donc :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= j\omega \cdot \underline{V} \\ \int \underline{V} dt &= \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{V} \end{aligned}$$

1.7 Dipôles R, L ou C en régime sinusoïdal forcé

1.7.1 Régime forcé

On parle de *régime forcé* lorsque l'on impose à un circuit une tension sinusoïdale délivrée par un générateur. Après un régime transitoire, l'amplitude des tensions et des intensités est constante, indépendante du temps, à une fréquence identique à celle qu'impose le générateur, le réseau est alors en *régime permanent*. Seul ce régime nous intéresse dans cet ouvrage, nous ne nous intéressons pas au régime transitoire. Nous ne nous intéresserons donc pas à la résolution d'équations différentielles qui permettent de connaître l'évolution du courant dans un tel régime.

1.7.2 Étude du dipôle R

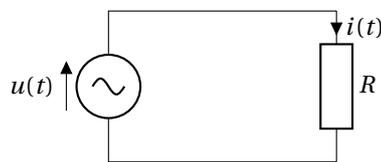


FIGURE 1.14 – Dipôle R en régime sinusoïdal forcé

La résistance R du circuit de la figure 1.14 est alimentée par une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_{\max} \sin(\omega t)$. Le sens de la flèche de tension à côté du générateur de tension alternative sinusoïdale de la figure 1.14 résulte d'un choix parfaitement arbitraire : en alternatif, pour écrire des équations de maille, on choisit la position de la borne + à un instant donné et on écrit l'équation de maille à cet instant. On arrête le temps pour le circuit à un instant où la borne + est dans une position que l'on souhaite. Bien évidemment, si on refait s'écouler le temps, une demi-période plus tard la position de la borne + sera en bas si on avait choisi de la placer en haut.

Pour calculer le courant absorbé par cette résistance, on peut appliquer la loi d'Ohm qui demeure valable pour les valeurs « instantanées³ » :

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_{\max}}{R} \sin(\omega t) = I_{\max} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}$$

On constate que :

- Le terme au dénominateur représente l'opposition au passage du courant, les « ohms » ;
- tension et intensité sont en phase ;
- $U_{\max} = R \cdot I_{\max} \implies I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R}$

Si l'on considère les nombres complexes associés à la tension et au courant, on a :

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$$

$\underline{Z}_R = R$ est l'impédance complexe de la résistance R .

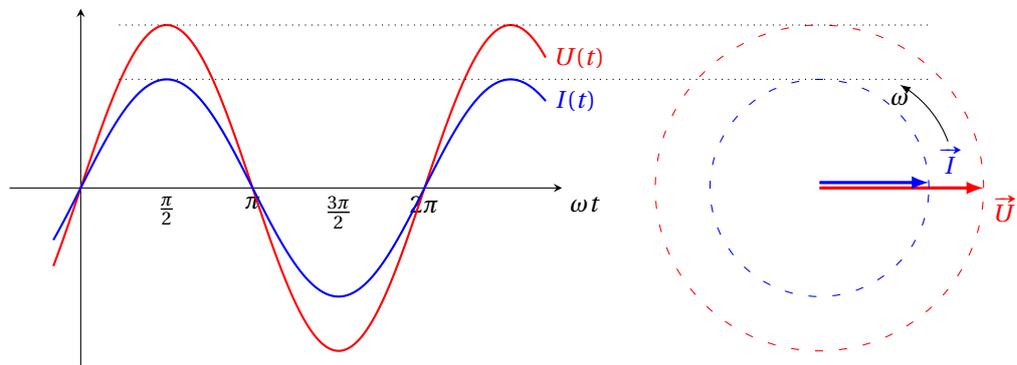


FIGURE 1.15 – Tension sinusoïdale au bornes d'une résistance pure R et courant absorbé, représentation « classique » à gauche et vecteurs de Fresnel associés à droite

La puissance électrique instantanée absorbée par la résistance est représentée à la figure 1.16. On constate que cette puissance est toujours positive, elle ne change pas de signe, ce qui veut dire que la résistance est *toujours un récepteur d'énergie électrique*. Énergie électrique que la résistance transforme intégralement en chaleur par effet Joule.

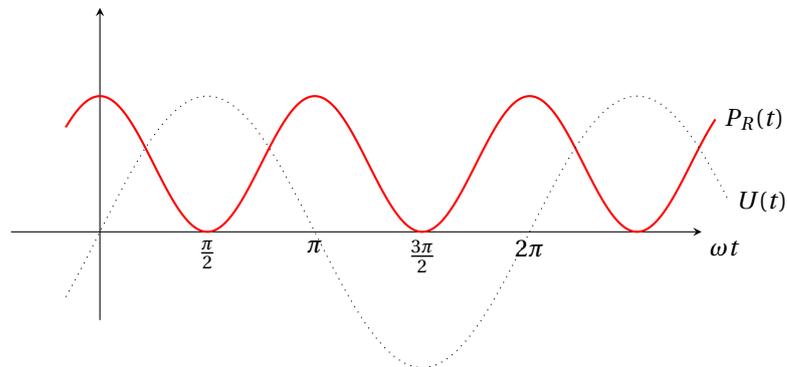


FIGURE 1.16 – Puissance dissipée dans une résistance pure

1.7.3 Étude du dipôle L

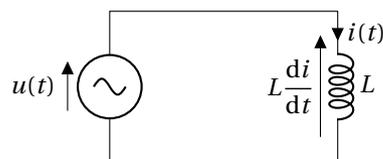


FIGURE 1.17 – Dipôle L en régime sinusoïdal forcé

3. une valeur instantanée est la valeur d'une grandeur à un instant donné

L'inductance L du circuit de la figure 1.17 page précédente est alimentée par une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_{\max} \sin(\omega t)$. La force contre électromotrice induite aux bornes de l'inductance est $: L \frac{di}{dt}$ avec le sens indiqué sur la figure 1.17 page ci-contre pour l'instant choisi.

Si la résistance du circuit est nulle, la loi des mailles relative aux valeurs instantanées s'écrit :

$$u(t) = L \frac{di}{dt} \implies U_{\max} \sin(\omega t) = L \frac{di}{dt} \implies di = \frac{U_{\max} \sin(\omega t) \cdot dt}{L}$$

En intégrant, il vient :

$$i = -\frac{U_{\max}}{L\omega} \cos(\omega t) + \text{cte} = \frac{U_{\max}}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \text{cte}$$

On rappelle que $:-\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Si l'on suppose le régime permanent établi, la constante d'intégration est nulle, car la valeur moyenne de i est nulle. On a donc :

$$i = \frac{U_{\max}}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On constate que le courant est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ (déphasage retard) par rapport à la tension d'alimentation. On a $: I_{\max} = \frac{U_{\max}}{L\omega}$, soit $: U_{\max} = L\omega \cdot I_{\max}$

$L\omega$ est homogène à une résistance. Tout comme la résistance R , ce terme apparaît au dénominateur sous U_{\max} et traduit l'opposition au passage du courant. $L\omega$ est la *réactance inductive* du circuit.

La figure 1.18 page suivante nous montre qu'en partant du vecteur \vec{I} , il faut tourner de 90° dans le sens positif trigonométrique pour arriver sur \vec{U} , dans le domaine des nombres complexes associés, cela se traduit par une multiplication par j :

$$\underline{U} = (jL\omega) \cdot \underline{I}$$

$\underline{Z}_L = jL\omega$ est l'impédance complexe de l'inductance L . L'impédance généralise la notion de résistance.

La figure 1.19 page suivante représente la puissance instantanée $p(t) = u(t) \times i(t)$. On constate que cette puissance possède une valeur moyenne nulle. Mais l'inductance n'est pas inactive pour autant ! Pendant un quart de période de la tension $u(t)$ (représentée en pointillés sur la figure 1.19 page suivante) la puissance est positive et l'inductance absorbe de l'énergie électrique qu'elle transforme en énergie magnétique. Puis, pendant le quart de période suivant, la puissance devient négative. L'inductance transforme de l'énergie magnétique en énergie électrique qu'elle restitue à la source de tension. Cette suite incessante d'absorption – restitution est la cause de circulation d'un courant entre la source de tension et l'inductance. On introduira la notion de *puissance réactive* pour quantifier cet échange de puissance.

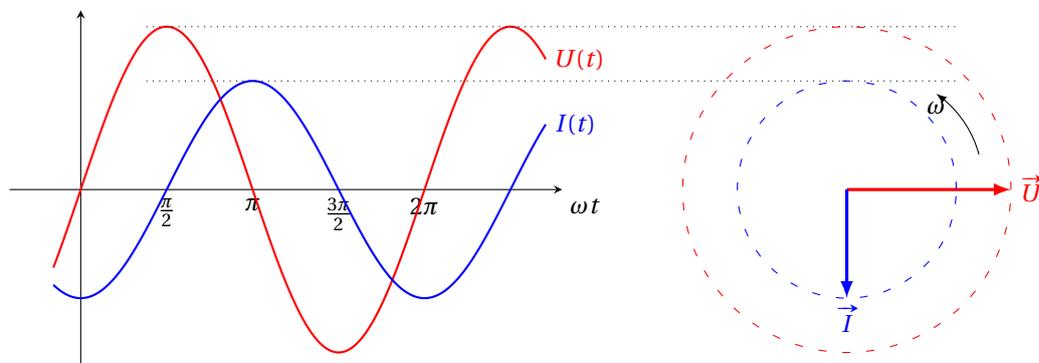


FIGURE 1.18 – Dipôle L en régime sinusoïdal forcé

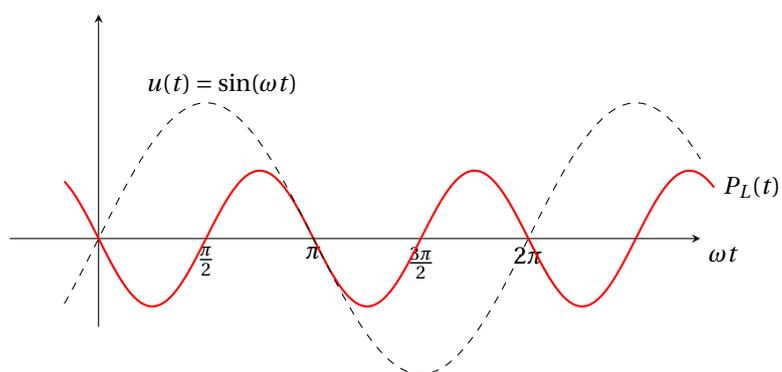


FIGURE 1.19 – Puissance dissipée dans une inductance pure

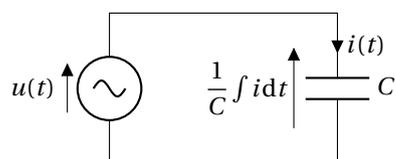


FIGURE 1.20 – Dipôle C en régime sinusoïdal forcé

1.7.4 Étude du dipôle C

Le condensateur C du circuit de la figure 1.20 page ci-contre est alimentée par une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_{\max} \sin(\omega t)$. La force contre électromotrice induite aux bornes du condensateur est :

$$q = C \cdot u \Rightarrow i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow u = \frac{1}{C} \int i dt$$

avec le sens indiqué sur la figure 1.17 page 14 pour l'instant choisi. Le condensateur C se charge et se décharge au cours d'une période puis l'opération se répète au cours des périodes suivantes. Si q est la charge instantanée du condensateur, on a :

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \cos(\omega t) = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

On rappelle que : $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. On constate expérimentalement que le courant i est sinusoïdal. Tout se passe, en définitive, comme si le condensateur était traversé par le courant alternatif. En fait, il n'en est rien : l'apparition des charges sur les armatures du condensateur est due au phénomène d'influence et il n'y a pas circulation des charges à l'intérieur du condensateur. Mais ce courant qui semble traverser le condensateur est déphasé en avance par rapport à la tension appliquée aux bornes du condensateur. Il s'agit d'un déphasage qui concerne le régime permanent. Bien entendu, à la mise sous tension le courant est apparu après la tension, il n'y a pas de mise en cause du principe de causalité, l'effet ne précède pas la cause...

L'intensité maximale est proportionnelle à la tension maximale appliquée :

$$I_{\max} = C \cdot \omega \cdot U_{\max} \Rightarrow U_{\text{eff}} = \frac{1}{C \cdot \omega} I_{\text{eff}}$$

Le terme $\frac{1}{C \cdot \omega}$, est homogène à une résistance. Cette quantité est appelée la *réactance capacitive*. Son unité est l'ohm, Ω .

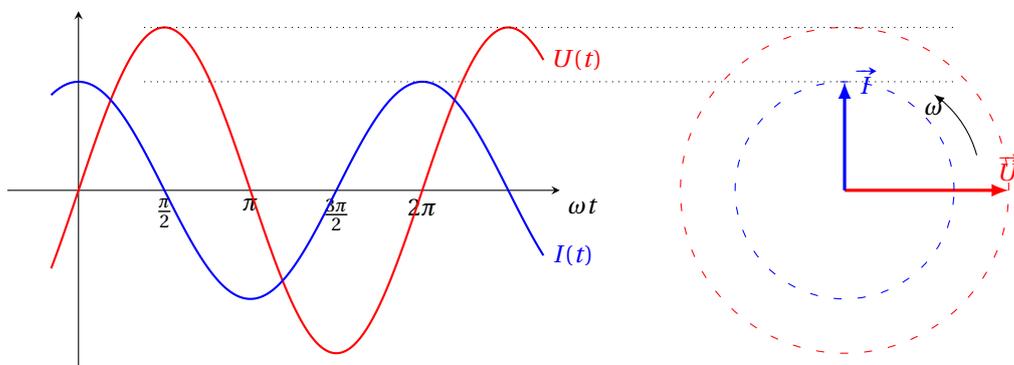


FIGURE 1.21 – Dipôle C en régime sinusoïdal forcé

En complexe : $\underline{U} = \frac{-j}{C\omega} \cdot \underline{I} = \frac{1}{jC\omega} \cdot \underline{I}$. En effet, partant du vecteur de Fresnel associé à \underline{I} , il faut tourner de 90° dans le sens horaire pour arriver sur le vecteur de Fresnel \underline{U} et donc multiplier \underline{I} par $-j$.

$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ est l'impédance complexe du condensateur C .

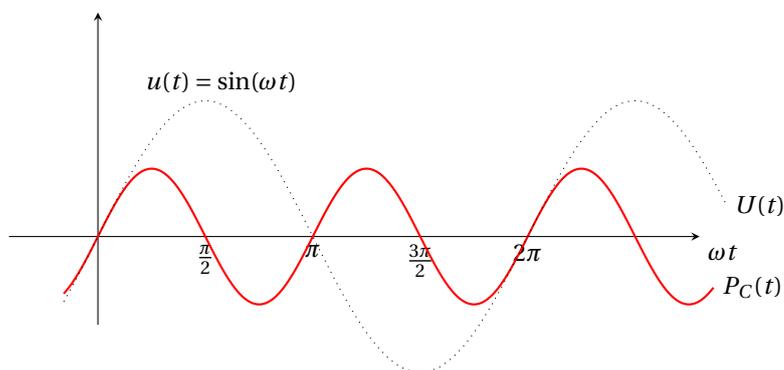


FIGURE 1.22 – Puissance dissipée dans une capacité pure

Comme pour l'inductance, la puissance échangée par un condensateur avec la source de tension alternative qui est branchée à ses bornes est nulle en moyenne comme le montre la figure 1.22. Cependant, là aussi, pendant une alternance de la puissance (correspondant à un quart de période de la tension d'alimentation) le condensateur absorbe de la puissance électrique transformée en énergie électrostatique. Pendant l'alternance suivante, l'énergie électrostatique est transformée en énergie électrocinétique restituée à la source de tension. De manière incessante, il y a absorption puis restitution d'énergie. La *puissance réactive* permettra de quantifier cet échange d'énergie dont la moyenne est nulle pour un condensateur idéal. Bien évidemment un courant non nul circule entre la source de tension et le condensateur pour assurer cet échange d'énergie.

1.8 Impédance et admittance

Pour les trois dipôles, R , L et C , on peut écrire :

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

avec :

- pour la résistance : $\underline{Z} = R$;
- pour l'inductance : $\underline{Z} = jL\omega$;
- pour le condensateur : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$.

\underline{Z} est l'équivalent d'une résistance, grandeur physique qui « gêne », qui s'oppose au passage du courant, on l'appelle *impédance complexe*.

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi = R + jX$$

où R est la résistance et X la *réactance*, toute deux s'expriment en Ω .

À l'aide de démonstrations similaires à celles faites pour les résistances, on montre que les impédances s'associent de la même manière que les résistances.

Pour des impédances en série, l'impédance équivalente complexe est égale à la somme des impédances complexes.

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

Pour des impédances en parallèle, l'inverse de l'impédance équivalente complexe est égale à la somme des inverses des impédances complexes.

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

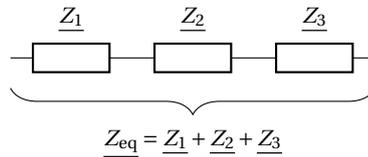


FIGURE 1.23 – Impédances complexes en série

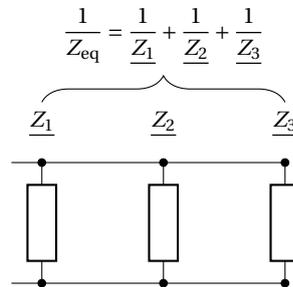


FIGURE 1.24 – Impédances complexes en parallèle

Pour simplifier l'expression et le calcul des impédances en parallèles, on fait appel à la notion d'admittance. L'admittance complexe associée à une impédance complexe \underline{Z} s'écrit :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$$

où $G = \text{Re}(\underline{Y}) = \frac{R}{R^2 + X^2}$ est la conductance, B est la *susceptance*. \underline{Y} , G et B s'expriment en siemens S ou en $\text{ohms}^{-1} \Omega^{-1}$.

Pour des dipôles en parallèle on a :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i} \implies \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i$$

L'impédance est un nombre complexe, elle peut donc être représentée dans le plan complexe. La résistance « ohmique » ne peut jamais être négative, aussi seuls le premier et le quatrième quadrant du plan complexe suffisent à cette représentation. On peut bien entendu associer des vecteurs de Fresnel au nombre complexe d'une impédance. Si on souhaite faire du « calcul graphique », on pourra déterminer l'impédance équivalente correspondant à des impédances en série en traçant un vecteur de Fresnel égal à la somme des vecteurs de Fresnel de chacune des impédances.

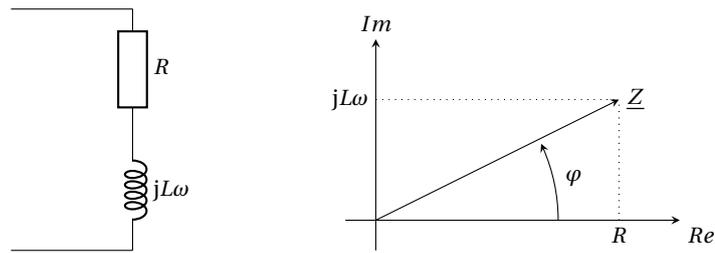


FIGURE 1.25 – Impédance inductive dans le plan complexe

Sur la figure 1.25 qui présente une impédance inductive, la résistance R se représente sur l'axe réel positif, tandis que la réactance inductive X_L est portée par l'axe imaginaire positif.

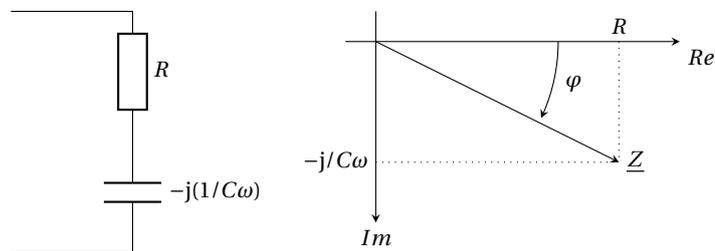


FIGURE 1.26 – Impédance capacitive dans le plan complexe

La figure 1.26 représente une impédance capacitive. La réactance capacitive complexe $\underline{X}_C = -\frac{j}{C\omega}$ est portée par l'axe imaginaire négatif.

L'impédance se trouve *toujours* dans le premier ou le quatrième quadrant, selon la valeur des éléments qui constituent le circuit. Dans l'expression polaire, l'argument de \underline{Z} sera toujours compris entre -90° et 90° .

Sous forme algébrique, une impédance est toujours de la forme : $\underline{Z} = R + jX$.

R est la résistance et X est la réactance :

- Si le circuit est inductif, la réactance est inductive : $X_L = +L\omega$.
- Si le circuit est capacitif, la réactance est capacitive : $X_C = -\frac{1}{C\omega}$

1.8.1 Exemples

1.8.1.1 Impédance inductive

Un circuit RL série constitué par une résistance R de $10\ \Omega$ et une inductance L de $15,92\ \text{mH}$ est alimenté par une tension $v = 230\sqrt{2}\sin(314t)\ \text{V}$ comme le montre la figure 1.27. Déterminons l'impédance complexe \underline{Z} du circuit.

La réactance de l'inductance est $X_L = L\omega = 314 \times (15,9 \times 10^{-3}) \approx 5\ \Omega$, d'où $\underline{Z} = (10 + j5)\ \Omega$, ou encore en notation de Steinmetz : $\underline{Z} = 11,18/\underline{26,56^\circ}\ \Omega$.

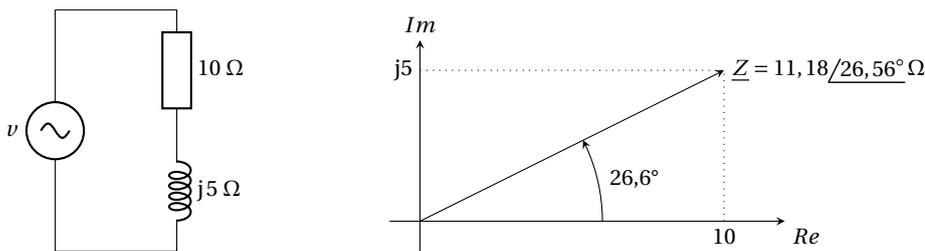


FIGURE 1.27 – Impédance inductive dans le plan complexe

1.8.1.2 Impédance capacitive

Un circuit RC série comporte les éléments $R = 10\ \Omega$ et $C = 159,24\ \mu\text{F}$. On lui applique une tension $v = 230\sqrt{2}\sin(314t)\ \text{V}$ (figure 1.28), déterminons l'impédance complexe du circuit.

La réactance de la capacité est donnée par $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{314 \times (159,24 \cdot 10^{-6})} \approx 20\ \Omega$. On en déduit : $\underline{Z} = (10 - j20)\ \Omega$, ou encore en notation de Steinmetz : $\underline{Z} = 22,36/\underline{-63,43^\circ}$.

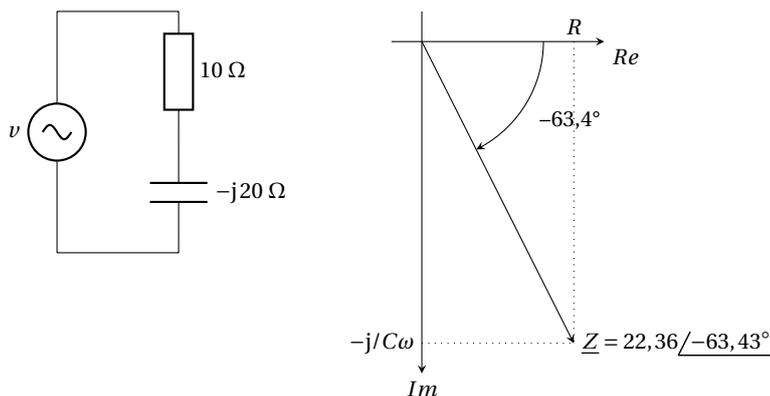


FIGURE 1.28 – Impédance capacitive dans le plan complexe

REMARQUE : Dans tous les circuits comportant des éléments autres que des résistances pures, l'impédance dépend de ω étant donné que X_L et X_C en dépendent. De ce fait, la valeur d'une impédance complexe n'est valable qu'à la fréquence pour laquelle elle a été calculée.

1.9 Équation des mailles en alternatif

Soit le circuit RLC de la figure 1.29 en régime sinusoïdal. Un générateur impose aux bornes de ce dipôle RLC la tension :

$$v(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t) \longrightarrow \underline{V} = V/0^\circ$$

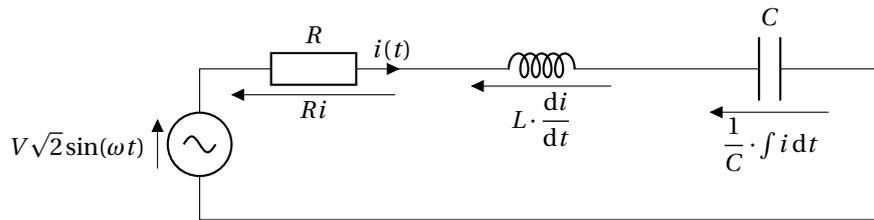


FIGURE 1.29 – Dipôle RLC en régime sinusoïdal forcé

Comment appliquer la loi des mailles ? Comment écrire une équation de maille ?

La première chose à faire est de fixer la position de la borne « + ». Par convention, par habitude, on place généralement la borne « + » au-dessus du générateur lorsque celui-ci est disposé verticalement, comme c'est le cas ici. Cela revient à arrêter le défilement du temps pour le circuit, à le figer à un instant donné.

Ensuite on détermine le sens de circulation du courant à cet instant. On sait que le courant sort de la borne « + » d'un générateur, ainsi, à l'instant considéré, le courant va circuler dans le sens horaire sur le schéma 1.29. Bien entendu, une demi-période plus tard, la borne « + » est en-dessous et le sens de circulation du courant se sera inversé, car nous sommes en alternatif... Mais dans le cas présent, le temps s'est arrêté !

On place ensuite les flèches de d.d.p. aux bornes de chacun des dipôles en fonction du sens du courant.

Et il ne reste plus qu'à procéder comme on le fait en continu :

1. choisir un point de départ et d'arrivée identiques sur la maille (n'importe où sur la maille) ;
2. choisir un sens de circulation (trigonométrique ou horaire, peu importe) ;
3. partir du point de départ ;
4. comptabiliser les d.d.p. rencontrées (par convention, on les compte positivement si elles sont dans le sens de progression, négativement sinon) ;
5. une fois revenu au point de départ, écrire « = 0 » derrière la somme algébrique des d.d.p. pour achever l'écriture de l'équation de maille.

Procédons ainsi pour le schéma 1.29. Prenons comme point de départ la borne +. Choisissons de progresser dans le sens trigonométrique, nous obtenons l'équation de maille suivante :

$$+Ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i dt - V\sqrt{2}\sin(\omega t) = 0$$

1.10 Régime sinusoïdal forcé

L'équation obtenue précédemment, et correspondant au circuit de la figure 1.29 page ci-contre, est une équation intégro-différentielle à coefficients constants :

$$+Ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i dt = V\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

On peut réécrire cette équation sous la forme d'une équation différentielle du second ordre par rapport au temps. En cours de mathématiques, on montre que la solution d'une telle équation comporte deux termes :

- un terme qui décrit le régime transitoire du circuit lors de sa mise sous tension ; ce régime dure très peu de temps, au grand maximum quelques dixième de seconde ;
- un autre terme qui décrit le régime permanent sinusoïdal où l'amplitude maximale du courant est constante et où la pulsation de ce courant est la même que celle de la tension d'alimentation.

L'analyse expérimentale avec un oscilloscope permettant de visualiser tension et courant permet de confirmer les solutions obtenues mathématiquement et notamment d'affirmer qu'en régime permanent le courant est bien de même pulsation que la tension, d'amplitude maximale constante et présentant un déphasage φ par rapport à la tension.

Encore une fois, dans cet ouvrage nous ne nous intéresserons pas au régime transitoire. Très souvent, l'étude de ce régime transitoire n'offre que fort peu d'intérêt au regard du caractère fastidieux des calculs qui permettent de l'obtenir. Seul le régime permanent nous intéresse. Les paragraphes qui suivent montrent comment on obtient les caractéristiques du courant, solution de l'équation précédente, en régime permanent.

1.10.1 Obtention du régime permanent à l'aide de la notation complexe

Le courant, solution sinusoïdale de l'équation intégro-différentielle, est de la forme : $i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$.

Associons à la tension d'alimentation et au courant leur complexe en notation de Steinmetz :

$$\begin{aligned} v(t) = v\sqrt{2} \sin(\omega t) &\longrightarrow \underline{V} = V/\underline{0}^\circ \\ i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) &\longrightarrow \underline{I} = I/\underline{\varphi}^\circ \end{aligned}$$

Dans l'équation intégro-différentielle vue plus haut, remplaçons les fonctions du temps par leurs nombres complexes associés. Une dérivation par rapport au temps correspond à une multiplication par $j\omega$ et une intégration par une division par $j\omega$. Nous obtenons :

$$R \cdot (I/\underline{\varphi}^\circ) + L \cdot (j\omega) \cdot (I/\underline{\varphi}^\circ) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot (I/\underline{\varphi}^\circ) = V/\underline{0}^\circ$$

En mettant en facteur l'intensité $I/\underline{\varphi}^\circ$, nous obtenons :

$$\left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] (I/\varphi^\circ) = V/0^\circ \Rightarrow I/\varphi^\circ = \frac{V/0^\circ}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

1.10.1.1 Intérêt de la notation complexe

Nous voyons qu'en procédant ainsi avec les nombres complexes *il n'y a plus d'équation différentielle à résoudre* pour obtenir l'intensité !

1.11 Loi d'Ohm généralisée

Par comparaison et identification avec la loi d'Ohm en continu ($U = R \cdot I$), l'expression précédente est qualifiée de « loi d'Ohm généralisée ». Elle sera employée en alternatif sinusoïdal pour obtenir courant, tension ou impédance en régime permanent. Nous retiendrons :

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{ou} \quad \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

$$\text{où } \underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = Z/\varphi.$$

$$\text{Avec } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

$$\text{Et } \varphi = \arctan \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}.$$

À propos de l'arc-tangente, on fera attention au résultat donné par la calculatrice :

- Si $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) > 0$, il n'y a rien à modifier, l'angle est positif ;
- si $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) < 0$, il faudra avoir conscience que l'angle est négatif.

1.12 Vecteurs de Fresnel

Pour résoudre un problème d'alternatif, il est essentiel de savoir représenter correctement les vecteurs de Fresnel de la tension aux bornes d'un dipôle, \vec{U} , et du courant dans ce même dipôle, \vec{I} , avec les bonnes positions relatives de l'un par rapport à l'autre. Il est tout aussi essentiel de savoir esquisser correctement la position relative de ces vecteurs \vec{U} et \vec{I} pour des ensembles de dipôles en série ou en parallèle. Dans les deux paragraphes qui suivent les positions relatives de \vec{U} par rapport à \vec{I} en fonction du dipôle sont issues de ce qui a été établi au paragraphe 1.7 page 13. Il faut s'entraîner à savoir esquisser les constructions vectorielles 1.31 page ci-contre et 1.33 page 27 sans coup férir, un dessin approximatif au brouillon suffit dans la grande majorité des cas. Il ne faudra sortir la règle et le rapporteur que si une solution graphique est demandée.

1.12.1 Circuit série

Le circuit de la figure 1.30 est un circuit où les trois éléments R , L et C sont en série. L'intensité est la même dans ces trois dipôles, par conséquent c'est elle que l'on choisira comme origine des phases : $\underline{I} = I \angle 0^\circ$. La tension \underline{U} sera déphasée d'un angle φ par rapport à l'intensité.

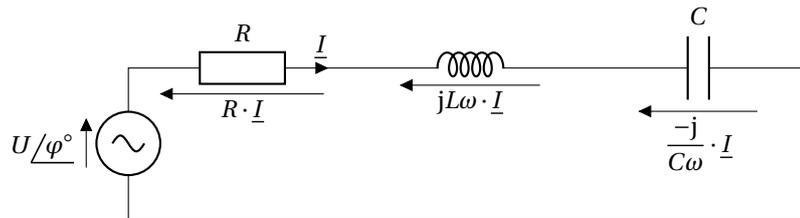


FIGURE 1.30 – Circuit RLC série

L'impédance du circuit de la figure 1.30 est :

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

La réactance capacitive $\frac{1}{C\omega}$ se retranche de la réactance inductive $L\omega$ pour donner la *réactance effective* $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$: on dit pour cela que la capacité est l'« antidote » de l'inductance et réciproquement.

Comme le montre la figure 1.31, trois cas sont possibles :

- $X > 0$, c'est-à-dire $L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \varphi > 0$: i est en retard sur u et le circuit est dit *inductif*, figure 1.31a ;
- $X = 0$, c'est-à-dire $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \varphi = 0$: i est en phase avec u et le circuit se comporte comme si la résistance R était seule, le circuit est à la « résonance », figure 1.31b ;
- $X < 0$, c'est-à-dire $L\omega < \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \varphi < 0$: i est en avance sur u et le circuit est dit *capacitif*, figure 1.31c.

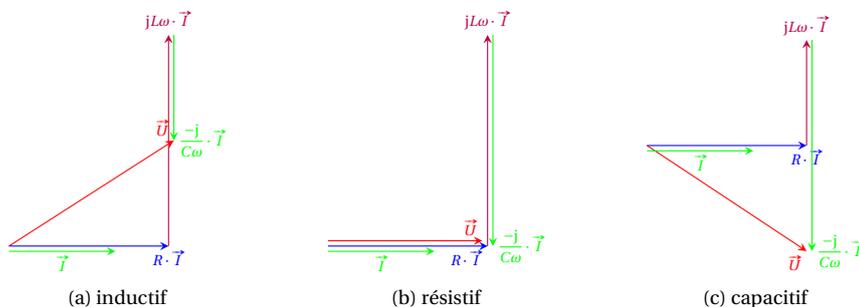


FIGURE 1.31 – Vecteurs tension aux bornes des dipôles R , L et C d'un circuit série suivant qu'il est : (a) inductif ; (b) résistif ; (c) ou capacitif.

Encore une fois, les vecteurs de Fresnel de la figure 1.31 page précédente sont dessinés en prenant comme origine des phases l'élément commun à R , L et C , soit ici l'intensité \vec{I} puisque le circuit est « série ».

1.12.2 Circuit parallèle

Le circuit de la figure 1.32 est un circuit où les trois éléments R , L et C sont en parallèle. La tension est la même aux bornes de ces trois dipôles, par conséquent c'est elle que l'on choisira comme origine des phases : $\underline{U} = U/0^\circ$. L'intensité \underline{I} sera déphasée d'un angle φ par rapport à la tension.

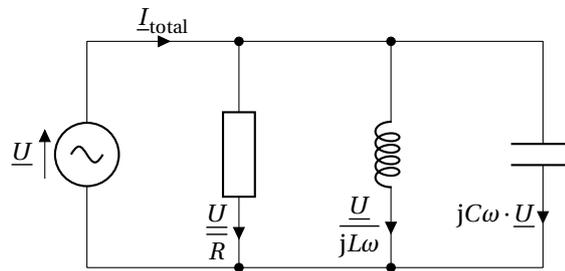


FIGURE 1.32 – Circuit RLC parallèle

Dans le circuit de la figure 1.32, l'admittance vaut :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

On constate que la susceptance de la bobine $\frac{1}{L\omega}$ se retranche de la susceptance de la capacité $C\omega$ pour donner la *susceptance effective* $B = C\omega - \frac{1}{L\omega}$: on dit pour cela que l'inductance est l'« antidote » de la capacité et réciproquement.

La loi d'Ohm généralisée nous donne :

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

Comme le montre la figure 1.33 page suivante, trois cas sont possibles :

- $B > 0$, c'est-à-dire $C\omega > \frac{1}{L\omega} \Rightarrow \varphi > 0$: i est en avance sur u et le circuit est dit *capacitif*, figure 1.33c page ci-contre ;
- $B = 0$, c'est-à-dire $C\omega = \frac{1}{L\omega} \Rightarrow \varphi = 0$: i est en phase avec u et le circuit se comporte comme si la conductance $\frac{1}{R}$ était seule, le circuit est à la « résonance », figure 1.33b page suivante ;
- $B < 0$, c'est-à-dire $C\omega < \frac{1}{L\omega} \Rightarrow \varphi < 0$: i est en retard sur u et le circuit est dit *inductif*, figure 1.33a page ci-contre.

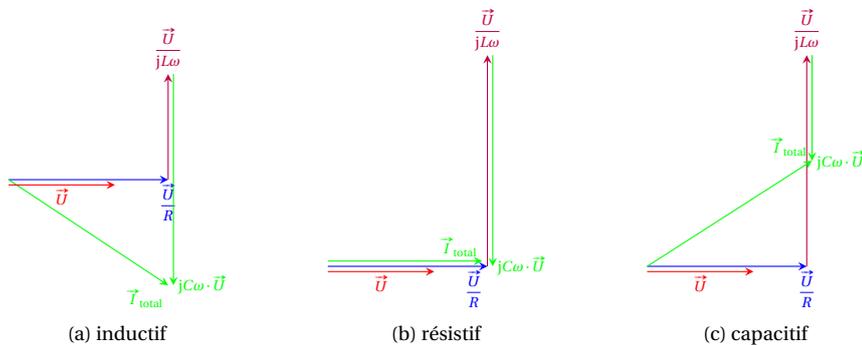


FIGURE 1.33 – Vecteurs courant dans les trois dipôles R , L et C d'un circuit parallèle suivant qu'il est globalement : (a) inductif ; (b) résistif ; (c) ou capacitif.

1.13 Loi des mailles, loi des noeuds

En alternatif sinusoïdal, la loi des mailles s'écrit avec des tensions complexes.

En alternatif sinusoïdal, la loi des noeuds s'écrit avec des courants complexes.

D'autre part, tous les résultats établis en continu : transformation dipôle de tension en dipôle de courant et réciproquement, formule des diviseurs de tension et de courant, théorème de Kennelly, théorèmes de Thévenin et de Norton, de superposition des états électriques, tout cela est toujours valable ! Il suffit de remplacer les tensions par des tensions complexes, les courants par des courants complexes et les résistances par des impédances complexes.

1.13.1 Exemple

Calculons l'intensité efficace dans le circuit suivant :

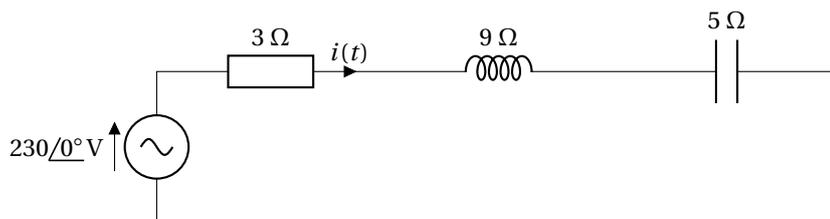


FIGURE 1.34 – Calcul de l'intensité dans un circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

Il suffit d'appliquer la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{I} = \frac{230/0^\circ}{3 + j(9 - 5)} = 46 / -53,1^\circ \text{ A}$$

Une solution graphique pourrait également être envisagée. Les impédances étant en série, c'est l'intensité qui est l'élément commun à tous les dipôles. C'est donc l'intensité I qui sera prise comme origine des phases. Le diagramme des vecteurs de Fresnel relatif à cette somme de fonctions sinusoïdales serait alors le suivant :

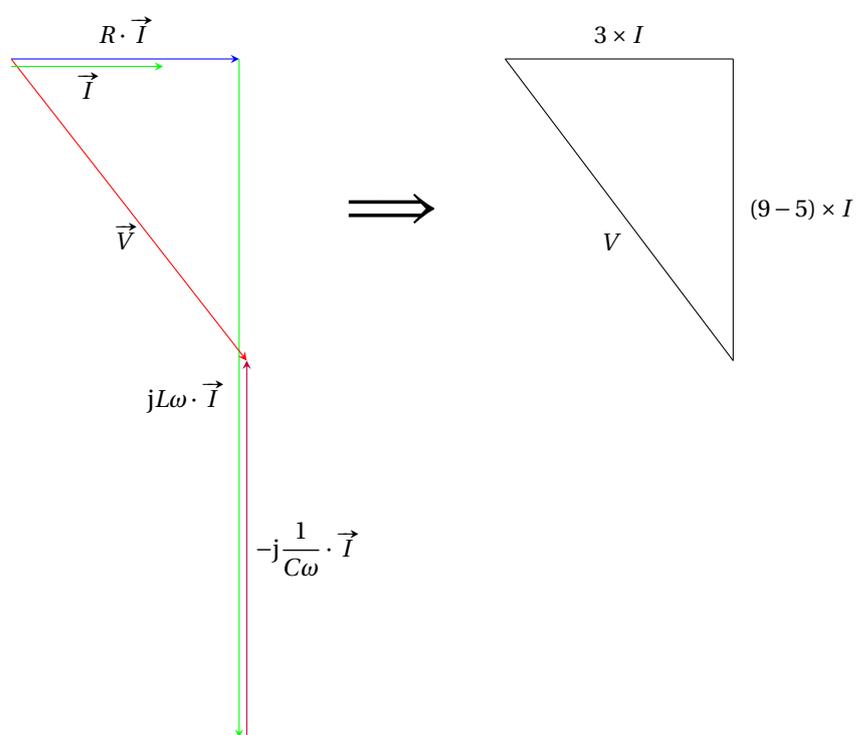


FIGURE 1.35 – Diagramme des vecteurs de Fresnel correspondant au circuit de la figure 1.34 page précédente

Sachant que l'hypoténuse vaut $V = 230$ V, on peut par proportionnalité en déduire le nombre de volts correspondant au côté horizontal $3 \times I$ ou encore au côté vertical $(9 - 5) \times I$ et calculer l'intensité. Mais c'est un procédé plus long et moins précis que le calcul à l'aide de la loi d'Ohm généralisée.

1.14 Exercices

1.14.1 Vecteurs de Fresnel de la tension, du courant et de l'impédance d'un circuit capacitif

Un circuit auquel on applique une tension $v = 325,27 \cdot \sin(314t + 160^\circ)$ est traversé par une intensité $i = 28,284 \cdot \sin(314t - 155^\circ)$.

1. Construire les vecteurs de Fresnel de la tension et du courant.
2. Construire le vecteur de Fresnel relatif à l'impédance.
3. En admettant que le circuit comporte deux dipôles en série, calculer la résistance et la réactance de ces dipôles et la valeur de l'inductance ou de la capacité du dipôle présentant une réactance.

Voir le corrigé [1.15.2 page 32](#).

1.14.2 Vecteurs de Fresnel de la tension, du courant et de l'impédance d'un circuit inductif

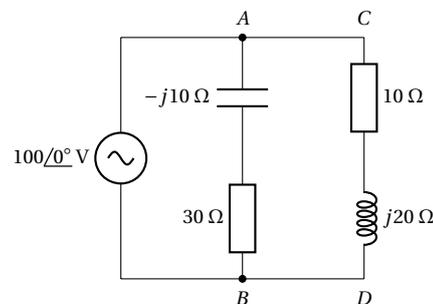
Un circuit auquel on applique une tension $v = 325,27 \cdot \sin(314t + 45^\circ)$ est traversé par une intensité $i = 5 \cdot \sin(314t - 15^\circ)$.

1. Construire les vecteurs de Fresnel de la tension et du courant.
2. Construire le vecteur de Fresnel relatif à l'impédance.
3. En admettant que le circuit comporte deux dipôles en série, calculer la résistance et la réactance de ces dipôles et la valeur de l'inductance ou de la capacité du dipôle présentant une réactance.

Voir le corrigé [1.15.2 page 32](#).

1.14.3 Circuit à deux branches en parallèle

Soit le montage suivant alimenté par une tension alternative sinusoïdale dont la fréquence est de 50 Hz :



1. Calculer l'intensité efficace du courant dans la branche AB .
2. Calculer l'intensité efficace du courant dans la branche CD .
3. Calculer l'intensité efficace du courant totale délivrée par le générateur de tension.
4. Calculer l'impédance vue par le générateur.

Voir le corrigé [1.15.3 page 34](#).

1.14.4 Calcul de la fréquence d'alimentation et de l'angle de déphasage

L'impédance complexe d'un circuit à deux dipôles en série $R = 40 \Omega$ et $L = 0,04 \text{ H}$ est égale à $80 \angle \varphi \Omega$. Calculer l'angle φ ainsi que la fréquence f en Hz.

Voir le corrigé [1.15.4 page 34](#).

1.14.5 Calcul d'une réactance

Un circuit comporte une résistance de 50Ω en série avec une réactance inconnue. Déterminer la nature de cette réactance et calculer sa valeur si, pour une fréquence de 300 Hz :

1. i est en avance par rapport à u de 30° ;
2. i est en retard par rapport à u de 30° .

Voir le corrigé [1.15.5 page 35](#)

1.14.6 Calcul d'une fréquence pour arriver à un déphasage donné

Dans un circuit série comportant une résistance $R = 20 \Omega$ et une capacité $C = 30 \mu\text{F}$, le courant est en avance sur la tension appliquée d'un angle de 40° . Pour quelle fréquence le courant sera-t-il en avance sur la tension d'un angle de 60° ?

Voir le corrigé [1.15.6 page 36](#)

1.14.7 Calcul d'une résistance, C et φ donnés

Une capacité C de $30 \mu\text{F}$ est montée en série avec une résistance R , l'ensemble est alimenté par un réseau à 50 Hz . Le courant dans le circuit est en avance sur la tension d'un angle de 40° . Calculer la valeur de R .

Voir le corrigé [1.15.7 page 36](#)

1.15 Corrigés des exercices

1.15.1 corrigé de l'exercice 1.14.1 page 29

De prime abord, on pourrait croire que la règle donnée 1.8 page 20 n'est pas respectée, mais il n'en est rien. En traçant les vecteurs de Fresnel on constate que le déphasage entre tension et courant est de 45° et donc bien dans la fourchette de -90° à 90° . Il n'est pas nécessaire d'effectuer un tracé soigné, des vecteurs dessinés approximativement au brouillons suffisent. Cet exercice a pour but de vous faire prendre conscience du fait qu'il faut adopter les notations des électriciens : la notation de Steinmetz, en attribuant à la tension ou au courant, une phase à l'origine nulle.

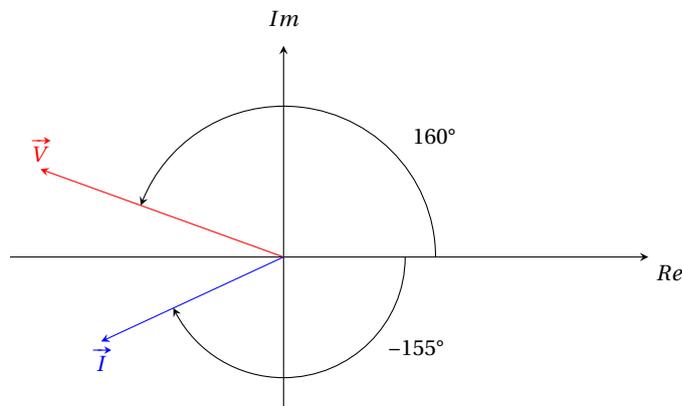


FIGURE 1.36 – Vecteurs de Fresnel tension et intensité pour une impédance capacitive

On peut associer des notations de Steinmetz aux grandeurs temporelles sans prendre plus de précaution : $\underline{V} = 230/\underline{160^\circ}$ V et $\underline{I} = 20/\underline{-155^\circ}$ A et en déduire une valeur correcte de l'impédance complexe :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{230/\underline{160^\circ}}{20/\underline{-155^\circ}} = 11,5/\underline{315^\circ} \Omega = 11,5/\underline{-45^\circ} \Omega = (8,13 - j8,13) \Omega$$

Il faut avoir à l'esprit que les vecteurs de Fresnel tournent à la vitesse $\omega \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi la figure 1.36 nous montre les vecteurs non pas à $t = 0$ mais à un instant postérieur, ou antérieur. On pourrait modifier la notation de Steinmetz et rendre la phase d'un des deux vecteurs égale à 0. Rendons nulle la phase de v , on obtient : $\underline{V} = 230/\underline{0^\circ}$ V et $\underline{I} = 20/\underline{-155 - 160^\circ} = 20/\underline{+45^\circ}$ A, ce qui donne :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{230/\underline{0^\circ}}{20/\underline{45^\circ}} = 11,5/\underline{-45^\circ} \Omega = (8,13 - j8,13) \Omega$$

La figure 1.37 page suivante, tracée avec une tension de phase à l'origine nulle, montre plus explicitement que le courant est en avance sur la tension de 45° , indiquant ainsi qu'on a affaire à un circuit RC.

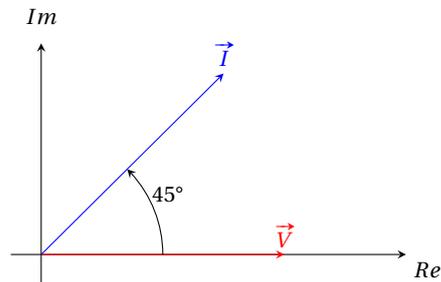


FIGURE 1.37 – Vecteurs de Fresnel tension et intensité pour une impédance capacitive, phase de la tension ramenée à 0°

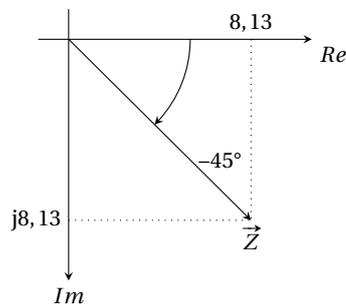


FIGURE 1.38 – Impédance capacitive dans le plan complexe

1.15.2 Corrigé de l'exercice 1.14.2 page 29

Tension et courant ne sont pas donnés en notation de Steinmetz, exprimons-les à l'aide de cette notation si pratique en électricité :

$$v = 325,27 \sin(314t + 45^\circ) \longrightarrow \underline{V} = \frac{325,27}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 230 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$i = 5 \sin(314t - 15^\circ) \longrightarrow \underline{I} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ = 3,53 \angle -15^\circ \text{ A}$$

Ce qui, d'après la loi d'Ohm généralisée, donne une impédance :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{230 \angle 45^\circ}{3,53 \angle -15^\circ} = 65 \angle 60^\circ \Omega = 32,5 + j56,3 \Omega$$

1. Voir la figure 1.39 page suivante
2. Voir la figure 1.40 page ci-contre
3. Le courant est déphasé en arrière de 60° , indiquant qu'il s'agit d'un circuit *RL* série. On notera que l'angle entre le vecteur de Fresnel associé à l'intensité et celui associé à la tension ($15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$) se retrouve bien évidemment dans l'angle que fait \underline{Z} avec l'axe des abscisses ; cela est contenu dans la loi d'Ohm généralisée $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$, l'argument de \underline{U} est celui de \underline{I} auquel on ajoute celui de \underline{Z} .

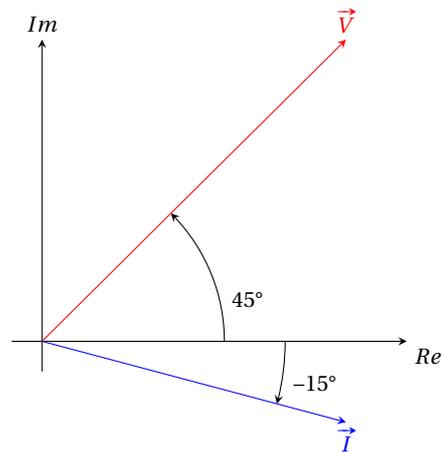


FIGURE 1.39 – Vecteurs de Fresnel de la tension et du courant pour l'exercice 1.14.2 page 29

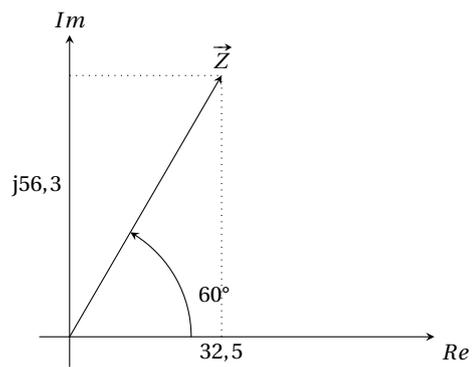


FIGURE 1.40 – Impédance inductive dans le plan complexe de l'exercice 1.14.2 page 29

L'écriture de \underline{Z} sous forme algébrique permet d'en déduire la valeur $L\omega = 56,3 \Omega$, ce qui correspond à une inductance $L = \frac{56,3}{314} \approx 179,3 \text{ mH}$. Le circuit se comporte comme une résistance de $32,5 \Omega$ en série avec une inductance de $179,3 \text{ mH}$.

1.15.3 Corrigé de l'exercice 1.14.3 page 29

La donnée de la fréquence ne nous sert à rien ici puisque les réactances sont données en Ω .

1. L'intensité dans la branche AB est donnée par la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{I}_{AB} = \frac{100/0^\circ}{30 - j10} = 3,16/18,4^\circ \text{ A}$$

2. L'intensité dans la branche CD est donnée par la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{I}_{CD} = \frac{100/0^\circ}{10 + j20} = 4,47/-63,4^\circ \text{ A}$$

3. Étant donné que nous avons calculé les intensités dans les branches AB et CD , on peut calculer l'intensité totale par la loi des nœuds :

$$\underline{I}_{\text{totale}} = \underline{I}_{AB} + \underline{I}_{CD} = (3,16/18,4^\circ) + (4,47/-63,4^\circ) = 5,83/-30,96^\circ \text{ A}$$

4. L'impédance vue du générateur peut être calculée de deux manières :

— soit à l'aide de ce que nous avons déjà calculé :

$$\underline{Z}_{\text{équivalente}} = \frac{V}{I} = \frac{100/0^\circ}{5,83/-30,96^\circ} = 17,15/30,96^\circ \Omega$$

— soit en calculant l'impédance équivalente : $\underline{Z}_{\text{équivalente}} = \frac{\underline{Z}_{AB} \times \underline{Z}_{CD}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{CD}}$:

$$\underline{Z}_{\text{équivalente}} = \frac{(30 - j10) \times (10 + j20)}{(30 - j10) + (10 + j20)} = 17,15/30,96^\circ \Omega$$

1.15.4 Corrigé de l'exercice 1.14.4 page 30

L'impédance du circuit est : $40 + jX_L = 80/\varphi$. De la figure 1.41 page suivante, nous déduisons : $\varphi = \arccos(40/80) = 60^\circ$.

D'où $X_L = 80 \cdot \sin 60^\circ \approx 69,3 \Omega$.

Nous avons également : $X_L = L\omega = L(2\pi f) \implies f = \frac{X_L}{2\pi L} = 275,6 \text{ Hz}$.

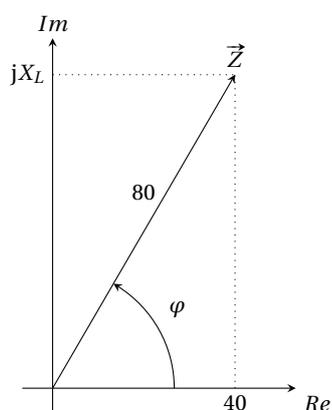


FIGURE 1.41 – corrigé de l'exercice 1.14.4 page 30

1.15.5 Corrigé de l'exercice 1.14.5 page 30

Un déphasage arrière de 30° est obtenu avec une inductance de réactance X_L en série avec la résistance R . En traçant les impédances comme sur la figure 1.42, nous avons :

$$\tan 30^\circ = X_L/50 \Rightarrow X_L = 28,86 \Omega \Rightarrow L = X_L/(2\pi f) = 15,31 \text{ mH}$$

Un déphasage avant de 30° est obtenu avec une capacité de réactance X_C en série avec la résistance R . Il en découle :

$$\tan(-30^\circ) = X_C/50 \Rightarrow X_C = -28,86 \Omega \Rightarrow C = \frac{1}{|X_C| \cdot \omega} = \frac{1}{28,86 \times (2 \cdot \pi \cdot 300)} = 18,38 \mu\text{F}$$

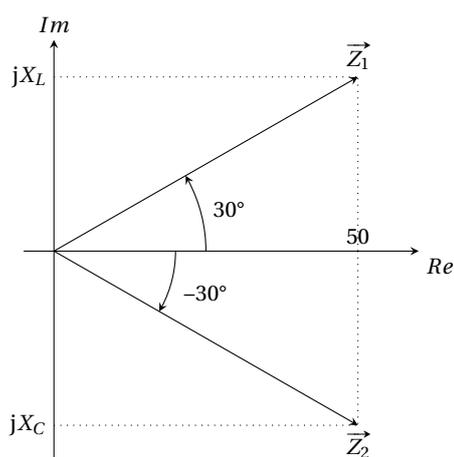


FIGURE 1.42 – Correction de l'exercice 1.14.5 page 30

1.15.6 Corrigé de l'exercice 1.14.6 page 30

Le courant est en avance sur la tension, ce qui veut dire que la tension est en retard sur le courant est que l'argument de l'impédance est négatif. On peut ainsi esquisser la figure 1.43. De la figure 1.43, nous tirons :

$$\tan(-40^\circ) = \frac{X_{C_1}}{20} = -0,8391 \Rightarrow |X_{C_1}| = 1,6782 \Omega$$

$$\text{Par ailleurs : } |X_{C_1}| = \frac{1}{C2\pi f_1} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{C2\pi |X_{C_1}|} = \frac{1}{2\pi(30 \mu\text{F} \times 1,6782 \Omega)} = 3\,161,2 \text{ Hz.}$$

Pour la fréquence f_2 , le courant est en avance sur la tension de 60° . Comme $\tan -60^\circ = X_{C_2}/20 = -2,7475 \Rightarrow |X_{C_2}| = 54,95 \Omega$.

$$\text{Or } \frac{f_2}{f_1} = \frac{X_{C_2}}{X_{C_1}} \Rightarrow \frac{f_2}{3161,2} = \frac{1,6782}{54,95} \Rightarrow f_2 = 96,54 \text{ Hz.}$$

Comme X_C est inversement proportionnelle à ω , le déphasage entre i et v dans le circuit RC série est d'autant plus grand que la fréquence est plus faible.

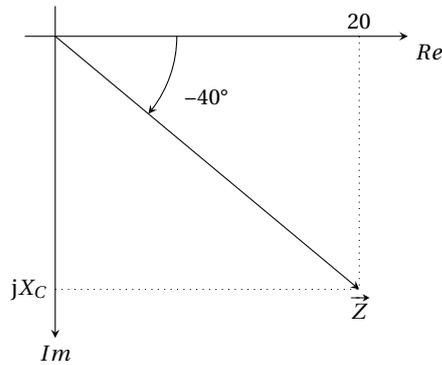


FIGURE 1.43 – Correction de l'exercice 1.14.6 page 30

1.15.7 Corrigé de l'exercice 1.14.7 page 30

On peut tracer l'esquisse du vecteur impédance au brouillon pour obtenir quelque chose qui ressemblera à la figure 1.44 page ci-contre. Cela nous permet d'établir :

$$X_C = -\frac{1}{C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = -\frac{1}{(30 \times 10^{-6})2\pi(50)} = -106 \Omega$$

$$\text{Le déphasage étant de } 40^\circ, \text{ on en déduit : } R = \frac{X_C}{\tan \varphi} = \frac{-106}{-0,8391} \approx 126,3 \Omega$$

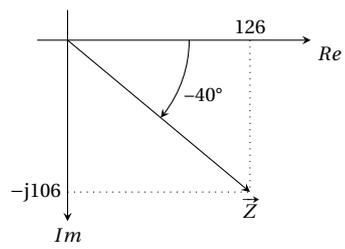


FIGURE 1.44 – Impédance pour l'exercice 1.14.7 page 30

Chapitre 2

Puissance en alternatif monophasé

2.1 Puissances échangées en opposition de phase

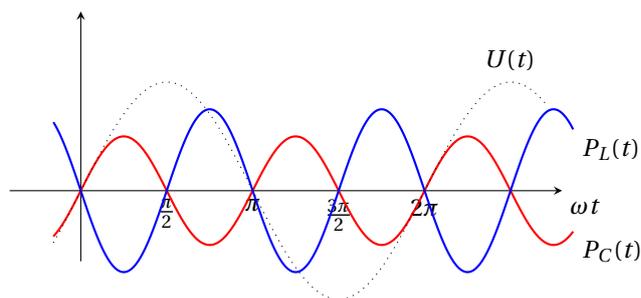


FIGURE 2.1 – Puissance dissipée dans une inductance pure en bleu et dans une capacité pur en rouge

La figure 2.1 montre la puissance instantanée échangée entre une inductance, un condensateur et la source de tension alternative sinusoïdale qui les alimente. Sur cette figure, nous constatons que les valeurs moyennes des puissance instantanée d'une inductance ou d'un condensateur sont nulles (pour des composants idéaux). Cela signifie qu'il n'y a aucune énergie électrique transformée en chaleur, en énergie mécanique, en énergie chimique ou autre. Par contre, il apparait très clairement que la puissance instantanée change de signe tous les quarts de période de la tension. Cela implique que l'inductance, par exemple, reçoit de l'énergie pendant un quart de période, énergie électrique qu'elle va transformer en énergie magnétique, et que pendant le quart de période suivant l'inductance transforme l'énergie magnétique en énergie électrique, devenant ainsi générateur. Le condensateur a le même comportement, si ce n'est que son échange d'énergie se produit en *opposition de phase* par rapport à l'inductance.

L'inductance et le condensateur ne font qu'échanger de l'énergie avec la source de tension alternative qui les alimente. Bien entendu, cet échange d'énergie entraîne la circulation d'un courant. On introduira la notion « d'énergie réactive », Q , afin de

quantifier ces échanges d'énergie. Lorsqu'un moteur électrique alternatif (moteur asynchrone monophasé par exemple) absorbe de l'énergie électrique, une partie de celle-ci est transformée en chaleur, aussi peu que possible, et l'autre en énergie mécanique. Mais pendant son fonctionnement, le moteur qui est un « être inductif » échange de l'énergie avec la source de tension. L'intensité totale absorbée par le moteur peut se décomposer en deux parties comme indiquée à la figure 2.2 : une *intensité active* qui transporte l'énergie transformée par le moteur en énergie mécanique, et un peu en chaleur, et une *intensité réactive* qui correspond à l'échange d'énergie entre la partie inductive du moteur et la source de tension.

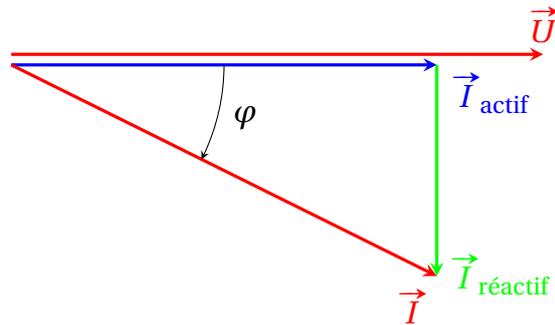


FIGURE 2.2 – Décomposition du courant en ses composantes actives et réactives

Sur la figure 2.2, le courant \vec{I}_{actif} est en phase avec la tension \vec{U} . Il est appelé *courant actif* ou « courant watté ».

Le courant $\vec{I}_{\text{réactif}}$ est déphasé de 90° , en retard par rapport à la tension \vec{U} . Il est appelé *courant réactif* ou « courant déwatté ».

2.2 Puissance en régime alternatif monophasé

La puissance instantanée consommée par un dipôle électrique est égale au produit des valeurs instantanées du courant qui le traverse et de la tension à ses bornes : $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, avec : p en W, u en V et i en A.

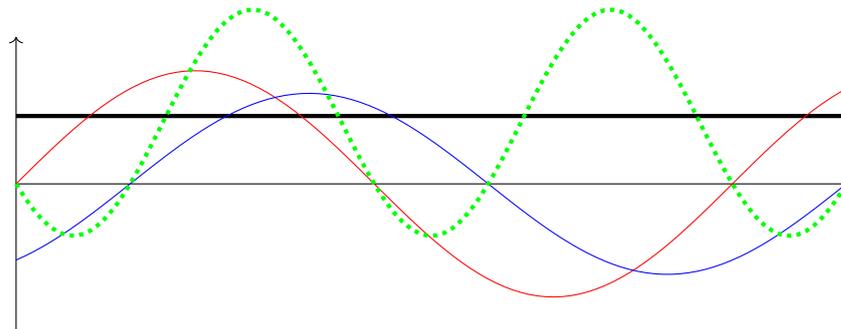


FIGURE 2.3 – Exemple de graphe de puissance pour $\cos \varphi = 0,8$

La figure 2.3 représente la puissance consommée par un dipôle soumis à une tension sinusoïdale (courbe en rouge), traversé par un courant également sinusoïdal

(courbe en bleue) et dont le facteur de puissance est égal à 0,8, soit ici $\varphi = \arccos 0,8 = 36,87^\circ$ inductif. La puissance instantanée est la courbe en pointillés verts. La puissance active est la moyenne de la puissance instantanée représentée par une droite horizontale en noir.

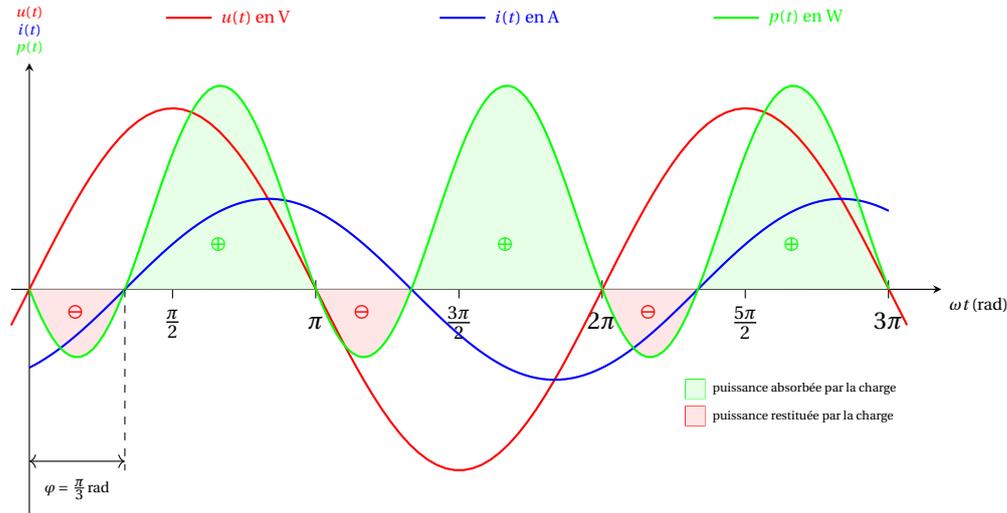


FIGURE 2.4 – Courbe de puissance pour une charge absorbant un courant déphasé en arrière de $\frac{\pi}{3}$ rad par rapport à la tension

En régime sinusoïdal, le courant et la tension ont pour expression :

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Nous avons fait le choix arbitraire d'une intensité en retard sur la tension, en supposant $\varphi > 0$, ce qui correspond au cas courant des récepteurs inductifs. Mais si l'intensité est en avance sur la tension, les calculs qui suivent demeurent exacts. Ici, $U_{\text{eff}} = \sqrt{2}U$ et $I_{\text{eff}} = \sqrt{2}I$ sont les valeurs efficaces de la tension et du courant, et φ est le déphasage du courant par rapport à la tension.

La puissance instantanée s'exprime donc par la formule :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) \times I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) = 2UI \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi)$$

En employant la formule : $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$, on calcule le produit de ces deux grandeurs qui a pour expression :

$$\begin{aligned} p(t) &= \left(U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) \right) \times \left(I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \right) \\ &= 2UI (\sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t - \varphi)) \\ &= UI \cos(\varphi) - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

La puissance instantanée est la somme :

- d'un terme constant $UI \cos(\varphi)$;
 - d'un terme sinusoïdal $UI \cos(2\omega t - \varphi)$.
- elle admet donc comme valeur moyenne : $P = UI \cos(\varphi)$

Cette expression est appelée *puissance active* : elle se calcule en watts (W). Dans le cas d'un récepteur, elle correspond à la puissance réellement consommée, absorbée par le dipôle et transformée en « autre chose ». Cet « autre chose » pouvant être de la chaleur, de l'énergie mécanique, chimique, lumineuse... L'unité de la puissance active est le Watt (W). Si on a à faire à un générateur, la puissance active sera la puissance fournie transformée en une autre puissance.

Dans le cas d'un dipôle récepteur on a :

$$P > 0 \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Par rapport au vecteur \vec{U} le vecteur \vec{I} se situe dans le premier ou le quatrième quadrant comme le montre la figure 2.5

Dans le cas d'un dipôle générateur on a :

$$P < 0 \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$$

\vec{I} est dans le deuxième ou le troisième quadrant. Dans ce second cas (générateur) on a intérêt à adopter pour le dipôle les conventions de type « générateur », c'est-à-dire P est alors la puissance *fournie* par le dipôle ($P > 0$) et \vec{I} disposé dans le premier ou le quatrième quadrant.

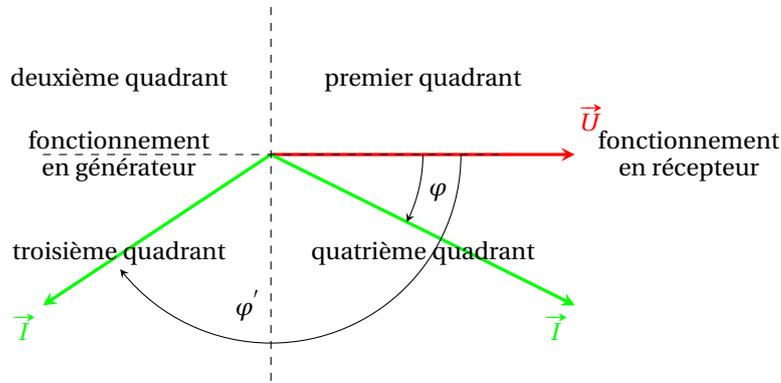


FIGURE 2.5 – Vecteurs \vec{U} et \vec{I} pour un fonctionnement en récepteur ou en générateur

Le second terme de la somme correspond à la *puissance fluctuante*. À cause de ce terme, La puissance instantanée p varie autour de la puissance active P suivant une loi sinusoïdale dont la fréquence est le double de celle de u et i .

La puissance active vaut :

$$P = \langle p(t) \rangle = UI \cdot \cos(\varphi)$$

où $\cos(\varphi)$ est le *facteur de puissance* si tant est qu'il s'agit bien d'un récepteur linéaire absorbant un courant sinusoïdal.

Reprenons la formule :

$$p(t) = UI \cos(\varphi) - UI \cos(2\omega t - \varphi)$$

En utilisant la formule de trigonométrie : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, que l'on applique à $\cos(2\omega t - \varphi)$, il vient :

$$\begin{aligned} p(t) &= UI \cos \varphi - UI (\cos(2\omega t) \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) \\ &= \underbrace{UI \cos \varphi (1 - \cos(2\omega t))}_{\text{puissance active}} - \underbrace{UI \sin \varphi \sin(2\omega t)}_{\text{puissance réactive}} \\ &= p_a + p_r \end{aligned}$$

$$- p_a = UI \cos \varphi [1 - \cos(2\omega t)] = P_a (1 - \cos(2\omega t)) \rightarrow P_a = UI \cos \varphi.$$

La puissance p_a est la *puissance active* alternative qui varie entre zéro et le double de la valeur moyenne à une double fréquence.

$$- p_r = UI \sin \varphi \sin 2\omega t = P_r \sin \omega t \rightarrow P_r = UI \sin \varphi.$$

La puissance p_r est la *puissance réactive* alternative qui varie de $-UI \sin \varphi$ à $+UI \sin \varphi$ à une double fréquence, sa valeur moyenne est nulle.

2.2.1 Expression de la puissance en fonction de R et de X

Considérons un dipôle passif, inductif par exemple, parcouru par le courant $i(t) = I_{\max} \sin \omega t$ et prenons ce courant comme référence pour les phases puisque nous lui avons choisi une phase à l'origine nulle. À la pulsation ω , l'impédance complexe de ce dipôle vaut :

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi = R + jX$$

Les vecteurs représentatifs de \underline{I} et \underline{U} sont donnés sur la figure 2.6.

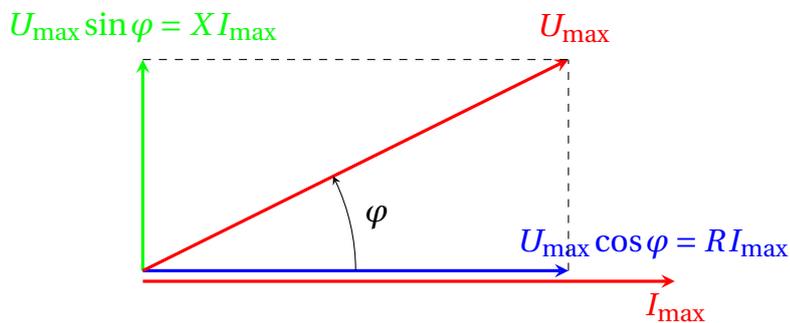


FIGURE 2.6 – Vecteurs \underline{I} et \underline{U} d'un dipôle inductif

Le courant instantané et la tension instantané sont donc :

$$\begin{aligned}
 i &= I_{\max} \sin \omega t \\
 u &= Z I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \\
 &= Z I_{\max} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega t + Z I_{\max} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega t \\
 &= I_{\max} (Z \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega t + Z \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega t)
 \end{aligned}$$

On a utilisé la formule : $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
 Or, $Z \cos \varphi = R$ et $Z \sin \varphi = X$. D'où l'expression de u :

$$u = I_{\max} (R \sin \omega t + X \cos \omega t)$$

La puissance instantané dans le dipôle est :

$$\begin{aligned}
 p &= u \times i \\
 &= I_{\max} (R \sin \omega t + X \cos \omega t) \times I_{\max} \sin \omega t \\
 &= R I_{\max}^2 \sin^2 \omega t + X I_{\max}^2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t
 \end{aligned}$$

En considérant que $I_{\max}^2 = (I\sqrt{2})^2 = 2I^2$, que $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ et que $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$, et en comparant avec l'expression obtenue en 2.2 page précédente, cette relation peut également s'écrire sous la forme :

$$p = RI^2(1 - \cos 2\omega t) + XI^2 \sin 2\omega t$$

2.3 Les différentes puissances et leurs formules

2.3.1 Puissance active

La puissance active instantanée a pour expression :

$$p_a = UI \cos \varphi (1 - \cos(2\omega t)) = \overline{p_a} (1 - \cos 2\omega t)$$

L'amplitude de p_a est appelée « puissance active » que l'on note P . On pose :

$$P = \overline{p_a} = UI \cos \varphi = RI^2$$

ATTENTION : L'argument φ est celui de l'impédance \underline{Z} .

Pour un récepteur, φ est situé dans le premier ou dans le quatrième quadrant, par conséquent $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \implies \cos \varphi \geq 0$. Par conséquent, sa valeur moyenne P_a est toujours positive ou nulle, c'est la *puissance active* :

La puissance active s'exprime en watts (W).

Pour un récepteur, la puissance active est la puissance électrique absorbée et transformée par le récepteur en puissance calorifique, mécanique, chimique, lumineuse... Pour un générateur, c'est la puissance électrique fournie à des récepteurs qui transformeront cette puissance en une puissance d'une autre forme, mécanique, chimique, etc.

2.3.2 Puissance réactive

La puissance réactive instantanée a pour expression :

$$p_r = UI \sin \varphi \sin(2\omega t)$$

Sa valeur moyenne est nulle, son amplitude est appelée « puissance réactive » que l'on note Q . On pose :

$$Q = UI \sin \varphi = XI^2$$

La puissance réactive s'exprime en voltampères réactifs (VAR ou vars).

ATTENTION : Ici aussi, l'argument φ est celui de l'impédance \underline{Z} .

Ainsi :

- Si le récepteur est inductif : $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow Q \geq 0$;
- si le récepteur est capacitif : $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \Rightarrow Q \leq 0$.

Cette puissance réactive est seulement échangée entre le ou les alternateurs qui alimentent les récepteurs et ceux-ci.

Q permet de quantifier cet échange d'énergie.

2.3.3 Puissance apparente

Nous avons établi la relation :

$$p(t) = \left(U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) \right) \times \left(I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \right) = UI \cos(\varphi) - UI \cos(2\omega t - \varphi)$$

Dans l'expression ci-dessus apparaît le terme UI . Par analogie avec ce qui a été vu en tensions et courants continus, on pose $S = UI$. S est appelée « puissance apparente » et s'exprime en voltampère (VA) ou kilovoltampère (kVA), c'est la puissance maximale qui est disponible pour faire fonctionner une installation électrique. Il est important de comprendre que cette unité ne correspond pas au Watt, la puissance apparente ne représentant en aucun cas un travail physique effectif.

La formule de trigonométrie : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ permet d'établir la formule :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Cependant la puissance apparente n'est pas une simple expression mathématique, elle caractérise bien les possibilités de certaines machines fonctionnant en régime sinusoïdal comme les transformateurs, les alternateurs, les moteurs asynchrones... En effet ces machines électriques sont prévues pour supporter :

- une tension maximale U_{\max} déterminée par l'isolation des bobinages ;
- un courant ne devant pas dépasser une valeur I_{\max} fixée par les possibilités de refroidissement.

La puissance apparente est également la valeur affichée sur le compteur électrique et sur le contrat à la souscription.

S est souvent appelée « puissance de dimensionnement ». En effet, la valeur de la puissance apparente nominale d'un appareillage permet d'en déduire l'intensité

nominale¹. On peut alors calculer la section des conducteurs en se fixant des pertes par effet Joule maximales. On peut déterminer le calibre des protections d'un appareil (choix des fusibles, réglage du disjoncteur).

$S_{\text{nominale}} = S_n$ permet le calcul de l'intensité nominale I_n , on a :

$$I_n = \frac{S_n}{U_n}$$

Le produit UI est donc une caractéristique de construction de la machine alors que la puissance active qu'elle fournit ou absorbe $P = UI \cos \varphi$ dépend du réseau qui l'alimente ou dans lequel elle débite par l'intermédiaire de $\cos \varphi$.

En général, pour une machine électrique ou un réseau électrique, P et S n'ont pas la même valeur numérique ; leur rapport $\frac{P}{S}$ est appelé « facteur de puissance ». En régime sinusoïdal, l'expression de P montre que, pour ce régime $\frac{P}{S} = \cos \varphi$

2.3.4 Puissance complexe

De la même manière que l'on peut associer des nombres complexes à la tension et à l'intensité :

$$u(t) = U\sqrt{2} \sin \omega t \rightarrow \underline{U} = U/0^\circ$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \rightarrow \underline{I} = I/\varphi^\circ$$

On peut associer une puissance complexe à la puissance instantanée :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) \times I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \rightarrow \underline{S} = \underline{U} \times \underline{I}^*$$

où \underline{I}^* est le conjugué de \underline{I} . En électricité, il est d'usage de noter le complexe conjugué par une étoile en exposant, ainsi par exemple \underline{I}^* est le conjugué de \underline{I} . En effet, si on ne prend pas le conjugué de \underline{I} , le $\sin \varphi$ n'aura pas le bon signe et on ne retrouvera pas :

$$p(t) = \underbrace{UI \cos \varphi [1 - \cos(2\omega t)]}_{\text{puissance active}} - \overbrace{UI \sin \varphi \sin(2\omega t)}^{\text{puissance réactive}}$$

mais plutôt :

$$p(t) = \underbrace{UI \cos \varphi [1 - \cos(2\omega t)]}_{\text{puissance active}} + \overbrace{UI \sin \varphi \sin(2\omega t)}^{\text{puissance réactive}}$$

Ainsi, on a :

1. nominale = normale et maximale.

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

Or d'après la loi d'Ohm généralisée : $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$. Nous avons donc :

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot I^2 = \underbrace{R \cdot I^2}_{\text{puissance active}} + \overbrace{jX \cdot I^2}^{\text{puissance réactive}}$$

2.3.5 Puissance fluctuante

La « puissance fluctuante » vaut :

$$P_{\text{fluctuante}} = UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

C'est une puissance sinusoïdale de fréquence double de celle du courant et de la tension. Pour des convertisseurs électrothermiques, cette puissance fluctuante n'a aucun effet, l'inertie thermique du système permettant de lisser totalement ces variations de puissance. En revanche, lors d'une conversion électromécanique, la machine électrique, moteur ou génératrice, du fait de son inertie, tourne avec une vitesse mécanique quasi constante et, à chaque instant, elle consomme ou fournit – aux pertes près – une puissance mécanique identique. Tout en absorbant la puissance moyenne, la machine est réceptrice de l'énergie fluctuante pendant un quart de la période de la tension et présente un couple moteur. Puis, pendant le quart de période suivant, elle restitue cette énergie fluctuante en devenant génératrice et le couple est alors résistant. Et ainsi de suite... On comprend que la puissance fluctuante soit ainsi responsable d'oscillations du couple autour d'une valeur moyenne constante, oscillations qui sont, en majeure partie, absorbées par l'élasticité de l'accouplement entre la machine électrique et le moteur ou la turbine qui l'entraîne (cas d'une génératrice) ou de la charge mécanique entraînée dans le cas d'un moteur électrique. Pour une machine de forte puissance, ces oscillations sont rédhibitoires, car elles pourraient provoquer la destruction de l'accouplement. En triphasé cette puissance fluctuante est nulle, c'est une des raisons pour lesquelles les alternateurs des centrales électriques et les très gros moteurs doivent être polyphasés et sont, le plus souvent, des machines triphasées.

Supposons qu'un alternateur monophasé délivre 1 000 A sous une tension de 1 000 V à une fréquence de 50 Hz. Supposons également que la charge alimentée soit inductive et décale le courant en arrière d'un angle φ . L'expression de la puissance délivrée se met sous la forme :

$$p(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t) \cdot I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

Pour opérer la transformation ci-dessus, on emploie la formule :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{(p+q)}{2} \sin \frac{(p-q)}{2}$$

Examinons cette expression de la puissance instantanée. Le premier terme de la somme, $UI \cos \varphi$, est la puissance active délivrée, elle est comprise entre 0 MW

et 1 MW selon le facteur de puissance $\cos(\varphi)$ de la charge. Le deuxième terme de la somme, $UI \cos(2\omega t + \varphi)$, constitue la puissance fluctuante, c'est une puissance sinusoïdale de fréquence 100 Hz et d'amplitude elle aussi égale à $UI = 1$ MW. Du fait de son inertie, la turbine tourne avec une vitesse mécanique quasi constante, et donc à chaque instant elle fournit une puissance identique. Ces inversions du signe de la puissance se traduisent par des oscillations du couple qui est tantôt moteur, tantôt résistant. En effet, comme $p = C \cdot \omega$ et que ω ne change pas de signe, l'inversion de signe de la puissance p se traduit bien par une inversion du signe du couple C . Ces oscillations du couple produisent un cisaillement au niveau de l'accouplement alternateur – turbine. Si elles sont, en majeure partie, absorbées par l'élasticité, elles peuvent finir par provoquer la rupture de l'accouplement mécanique entre la turbine qui entraîne l'alternateur et celui-ci.

Cela explique qu'en alternatif monophasé la puissance maximum des moteurs soit limité à une dizaine de kW, au-delà il faudrait largement surdimensionner l'accouplement de la machine afin qu'il puisse résister au couple de cisaillement. Au-dessus d'une dizaine de kW, on préfère donc utiliser des machines triphasées dans lesquelles il n'y a pas de puissance fluctuante, pas de couple de cisaillement et donc aucune nécessité de surdimensionner l'accouplement de la machine.

La puissance fluctuante est nulle dans les systèmes polyphasés.

Pour supprimer cette puissance fluctuante, les alternateurs de grande puissance doivent donc nécessairement produire un système de tensions polyphasées : il faut produire n phases ($n \geq 2$) déphasées convenablement dans le temps, chacune par rapport à l'autre de $\omega t = \frac{2\pi}{n}$. Le choix qui a été fait pour l'ensemble des réseaux du monde est $n = 3$.

2.3.6 Formules des puissances

Les formules suivantes sont à connaître par cœur :

$P =$	$UI \cos \varphi$	RI^2	$\frac{U_R^2}{R}$	partie réelle de (\underline{UI}^*)
$Q =$	$UI \sin \varphi$	XI^2	$\frac{U_X^2}{X}$	partie imaginaire de (\underline{UI}^*)
$S =$	UI	ZI^2	$\frac{U^2}{Z}$	module de (\underline{UI}^*)

Pour la puissance apparente, il y a une cinquième formule : $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

ATTENTION : En général : $S_{\text{totale}} \neq S_1 + S_2 + \dots + S_n$, mais $\vec{S}_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i$

ou encore : $\underline{S}_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n \underline{S}_i$

2.3.7 Exemple d'emploi des formules de calcul de puissance

Déterminons la puissance active, la puissance réactive et la puissance apparente dans un circuit d'impédance $\underline{Z} = 3 + j4 \Omega$, alimenté par une tension $\underline{U} = 100/30^\circ$ V.

Mettons d'abord l'impédance sous forme polaire :

$$\underline{Z} = 3 + j4 \Omega = 5/\underline{53,13^\circ} \Omega$$

Nous pouvons remarquer que le circuit est de nature inductive, car $\varphi > 0$.
Ensuite, déterminons l'intensité qui circule dans le circuit :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100/\underline{30^\circ}}{5/\underline{53,1^\circ}} = 20/\underline{-23,1^\circ} \text{ A}$$

ATTENTION : l'angle φ qui doit être utilisé dans les formules de calcul de P ou de Q est l'argument de l'impédance complexe \underline{Z} , soit ici $\varphi = +53,1^\circ$.

La puissance active peut être déterminée par les différentes formules du tableau 2.3.6 [page ci-contre](#), néanmoins la formule de la colonne numéro n° 3 est peu pratique, car il faudrait calculer la d.d.p. aux bornes de la partie réelle R de l'impédance. Prenons la formule de la première colonne :

$$P = UI \cos \varphi = 100 \times 20 \times \cos 53,1 = 1,2 \text{ kW}$$

La puissance réactive peut être déterminée par les différentes formules du tableau 2.3.6 [page précédente](#), ici aussi la formule de la colonne numéro n° 3 s'avère peu pratique, car il faudrait tout d'abord calculer la d.d.p. aux bornes de la partie imaginaire X de l'impédance. Prenons la formule de la première colonne :

$$Q = UI \sin \varphi = 100 \times 20 \times \sin 53,1 = 1,6 \text{ kVAR}$$

Enfin, la puissance apparente se calcule facilement par la formule de la première colonne :

$$S = UI = 100 \times 20 = 2 \text{ kVA}$$

On aurait pu passer par la puissance complexe :

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = (100/\underline{30^\circ}) \times (20/\underline{23,1^\circ}) = 2000/\underline{53,1^\circ} \text{ VA} = 1200 + j1600 \text{ VA}$$

Une calculatrice comme une de celles citées plus haut (voir 1.6.1 [page 10](#)) permet d'obtenir avec une grande facilité S , P et Q

2.4 Théorème de Boucherot

La puissance active d'un système est la somme des puissances actives des éléments qui le constituent.

$$P_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n P_i$$

La puissance réactive d'un système est la somme des puissances réactives des éléments qui le constituent.

$$Q_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n Q_i$$

La puissance apparente complexe d'un système est la somme des puissances apparente complexe des éléments qui le constituent.

$$\underline{S}_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n \underline{S}_i$$

En revanche, c'est généralement faux en ce qui concerne la puissance apparente (scalaire).

ATTENTION :

- Ce théorème n'est valable qu'à fréquence constante.
- En général : $S_{\text{totale}} \neq S_1 + S_2 + \dots + S_n$

On peut donner un autre énoncé du théorème de Boucherot²

Dans un réseau électrique parcouru par des courants sinusoïdaux de même fréquence :

- la somme des puissances actives d'une part,
- la somme des puissances réactives d'autre part,

consommées par l'ensemble des éléments, sont toutes les deux nulles. Autrement dit, pour chacune des deux puissances, la puissance fournie par certains éléments est égale, en valeur absolue, à la puissance absorbée par les autres éléments. On dit pour cela que *les puissances active et réactive se conservent*.

En ce qui concerne les puissances actives, le théorème de Boucherot est évident, c'est un cas particulier du principe général de la conservation de la puissance.

2.4.1 Vérification, démonstration du théorème de Boucherot

Nous allons tout d'abord vérifier le théorème de Boucherot à l'aide du circuit de la figure 2.7 page suivante

Dans le circuit de la figure 2.7 page ci-contre, les lois de Kirchhoff s'écrivent :

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

Multiplions respectivement ces équations par \underline{I}_1^* et \underline{I}_2^* , puis effectuons la somme membre à membre.

$$\underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{Z}_1 \underline{I}_1^2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2^2 + \underline{Z}_3 (\underline{I}_1^2 + \underline{I}_2^2 + \underline{I}_1 \underline{I}_2^* + \underline{I}_1^* \underline{I}_2)$$

Soit :

2. Paul Boucherot est né le 3 octobre 1869 à Paris et est décédé le 20 février 1943 à Ardentes (Indre). Ingénieur de l'École supérieure de physique et de chimie industrielles de la ville de Paris (ESPCI Paris), Paul Boucherot est un inventeur français qui a principalement œuvré dans le domaine de l'électricité. Il a également été professeur d'électrotechnique à l'ESPCI Paris.

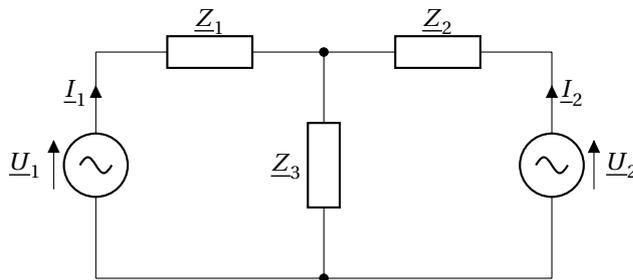


FIGURE 2.7 – Circuit servant de base à la démonstration du théorème de Boucherot

$$(P_1 + jQ_1) + (P_2 + jQ_2) = (R_1 + jX_1)I_1^2 + (R_2 + jX_2)I_2^2 + (R_3 + jX_3) \|\underline{I}_1 + \underline{I}_2\|^2$$

On en déduit :

$$P_1 + P_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 \|\underline{I}_1 + \underline{I}_2\|^2$$

$$Q_1 + Q_2 = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 + X_3 \|\underline{I}_1 + \underline{I}_2\|^2$$

- P_1 et P_2 sont les puissances actives fournies par les deux électromoteurs ;
- $R_1 I_1^2$, $R_2 I_2^2$, $R_3 \|\underline{I}_1 + \underline{I}_2\|^2$ sont les puissances actives consommées par les trois impédances.

Il en est de même pour les puissances réactives.

La vérification précédente peut être étendue à un réseau maillé quelconque. Cela constitue une démonstration du théorème de Boucherot.

2.5 Composantes active et réactive de la puissance

Soit un récepteur alimenté sous la tension \vec{U} et absorbant une intensité totale \vec{I} . Nous avons vu que l'on pouvait projeter le vecteur de Fresnel \vec{I} sur la demi-droite horizontale support de \vec{U} et sur une perpendiculaire à celle-ci comme le montre la figure 2.8 page suivante.

On obtient donc la longueur de la projection horizontale : $I_{\text{actif}} = I \cdot \cos \varphi$ et la longueur de la projection verticale : $I_{\text{réactif}} = I \cdot \sin \varphi$.

En multipliant chacun des côtés du triangle rectangle par la tension commune U , on transforme chaque côté en une puissance :

- $I \cdot \cos \varphi \times U \rightarrow UI \cos \varphi = P$;
- $I \cdot \sin \varphi \times U \rightarrow UI \sin \varphi = Q$;
- $I \times U \rightarrow UI = S$

Ainsi désormais, chaque côté du nouveau triangle obtenu est associé à une puissance, c'est le *triangle des puissances*. On peut associer des vecteurs de Fresnel aux différentes puissances comme le montre la figure 2.9 page suivante pour un récepteur inductif ou comme le montre la figure 2.10 page suivante pour un récepteur capacitif qui déphase le courant en avance par rapport à la tension.

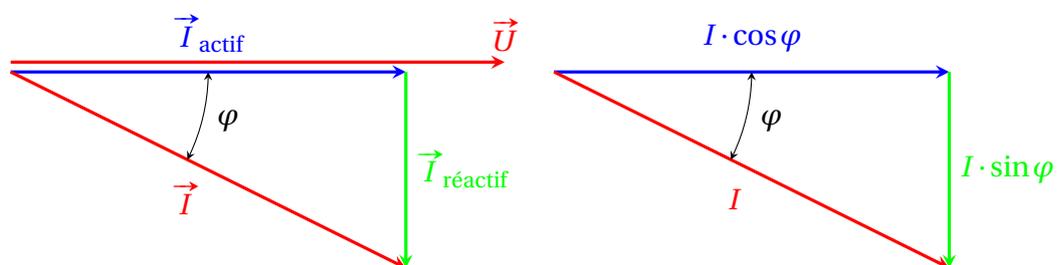


FIGURE 2.8 – Vers le triangle des puissances : le triangle des courants

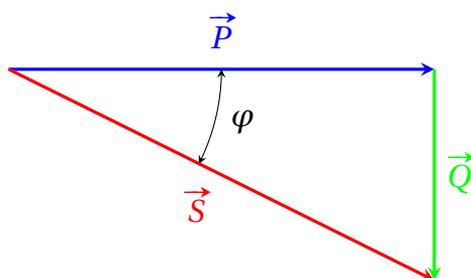


FIGURE 2.9 – Triangle des puissances pour un récepteur inductif

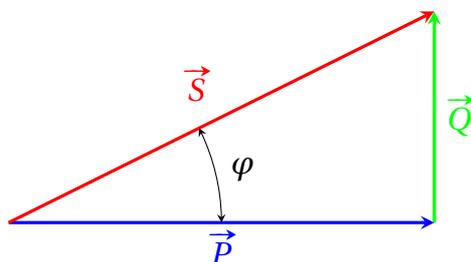


FIGURE 2.10 – Triangle des puissances pour un récepteur capacitif

2.5.1 Facteur de puissance

On définit le facteur de puissance (FP) par :

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{\text{puissance active (W)}}{\text{puissance apparente (VA)}}$$

Dans la plupart des installations industrielles alimentées sous une tension sinusoïdale u , le courant absorbé i est sensiblement sinusoïdal. Il en résulte que le facteur de puissance est égal à $\cos \varphi$, φ étant le déphasage de u par rapport au courant total i .

Une installation électrique quelconque (usine, grand magasin, maison) absorbe une certaine puissance électrique P dépendant des récepteurs en fonctionnement (moteurs, lampes, radiateurs, éclairage, électrolyseur, etc.), récepteurs qui vont transformer cette puissance électrique en puissance mécanique, calorifique, lumineuse, chimique, etc.

Or la distribution se fait toujours à tension sinusoïdale de valeur efficace U constante : il en résulte que la valeur efficace I du courant absorbé est, pour une puissance P donnée, inversement proportionnelle au facteur de puissance $\cos \varphi$.

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}$$

Par exemple, pour obtenir 10 kW sous 230 V, le réseau doit fournir :

- $I = 48,3$ A avec $\cos \varphi = 0,90$;
- $I = 72,4$ A avec $\cos \varphi = 0,60$;

Le courant dans la ligne d'alimentation de l'installation est d'autant plus intense que la valeur de $\cos \varphi$ est plus petite, ce qui entraîne :

- des pertes par effet Joule supplémentaires dans les câbles d'alimentation ;
- des chutes de tension plus élevées et donc des risques de perturbations dans la tension de distribution ;
- un surcalibrage des disjoncteurs et des sectionneurs présents sur les lignes de transports de l'énergie électrique ;
- des surcharges au niveau des transformateurs.

Pour réduire les inconvénients dus à l'augmentation de l'effet Joule et aux chutes de tension, il faudrait diminuer la résistance des conducteurs de la ligne d'alimentation et donc augmenter la section des conducteurs. En effet la résistance d'un câble est donnée par la formule $R = \rho \cdot \frac{l}{s}$, ρ est donnée et ne peut pas être diminuée, c'est la résistivité du cuivre ou de l'aluminium. La distance l entre l'alternateur de production et les utilisateurs ne peut pas être raccourcie. Pour diminuer R , il reste un seul paramètre : la section s que l'on peut augmenter.

Donc, pour diminuer R , il faudrait augmenter s et donc consommer plus de cuivre ou d'aluminium, ce qui entraînerait l'emploi de pylônes et d'isolateurs mécaniquement plus résistants, ce qui conduira à *surdimensionner la ligne*. Les alternateurs et les transformateurs qui alimentent la ligne devraient, eux aussi, être surdimensionnés.

Si les utilisateurs de l'énergie électrique consomment celle-ci avec un facteur de puissance peu élevé, cela entraîne pour la société distributrice de l'énergie électrique un surdimensionnement général de ses installations. Le surcoût entraîné par le surdimensionnement des installations grèverait celui de la fourniture d'électricité.

Mais les sociétés fournissant l'énergie électrique ont trouvé la parade. Afin d'obliger les abonnés à absorber de l'énergie électrique avec un facteur de puissance élevé, l'énergie réactive est facturée à partir d'une certaine puissance apparente souscrite. Cela n'est valable que pour les « gros consommateurs », soit à partir des abonnements de 250 kVA.

Pour un utilisateur possédant une installation importante (usine, grands magasins, etc.) un mauvais facteur de puissance entraîne les mêmes inconvénients techniques que pour la société distributrice :

- augmentation des pertes par effet Joule ;
- augmentation des chutes de tension ;
- surdimensionnement de ses transformateurs, de l'appareillage et de ses lignes intérieures.

2.5.2 Amélioration du facteur de puissance

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Nous voyons donc que pour augmenter le facteur de puissance d'une installation, il convient de diminuer la puissance réactive Q échangée entre l'installation et la société fournissant l'énergie électrique. Il est nécessaire que l'échange d'énergie réactive s'effectue au plus près possible des charges, pour éviter qu'elle ne soit appelée sur le réseau. C'est ce qu'on appelle « compensation de l'énergie réactive ». Pour inciter à cela et éviter de sur-calibrer son réseau, le distributeur d'énergie pénalise financièrement les consommateurs d'énergie réactive au-delà d'un certain seuil.

L'immense majorité des installations consommant de l'énergie électrique est de nature inductive (moteurs, éclairage fluorescent). Pour fournir l'énergie réactive aux récepteurs inductifs, on utilise :

- des batteries de condensateurs lorsque la demande d'énergie réactive est relativement constante ;
- un compensateur synchrone (machine synchrone fonctionnant à vide) lorsque la demande d'énergie varie dans de très larges proportions.

2.5.3 Calcul d'une batterie de condensateurs destinée à la compensation

Le problème à résoudre est le suivant : une installation, soumise à une tension U et consommant une puissance active P , présente un facteur de puissance $\cos \varphi$ jugé trop faible ; déterminer la capacité de la batterie de condensateurs nécessaire pour que l'ensemble ait un nouveau facteur de puissance meilleur que le précédent $\cos \varphi' > \cos \varphi$.

2.5.3.1 Méthode de Boucherot

Cette méthode est sans aucun doute la plus simple d'utilisation. On dresse un bilan comptable de l'installation sous forme de tableau. Le tableau contient autant de lignes qu'il y a de récepteurs dans l'installation, plus deux lignes pour les totaux de puissance avant relèvement du $\cos \varphi$ et après. Il y a une colonne où on effectuera un bilan des puissances actives de chaque récepteurs, une autre colonne pour le

bilan puissances réactives et une dernière colonne pour la puissance apparente, mais seules les deux dernières lignes seront remplies, car la puissance apparente totale n'est pas égale à la somme des puissances apparentes des récepteurs pris individuellement.

Cela fait, l'avant dernière ligne du tableau contient la somme des puissances actives et réactives avant le relèvement du facteur de puissance. La dernière ligne contient la somme des puissances actives et réactives après le relèvement du facteur de puissance.

À partir des puissances globales P et Q , on calcule la puissance apparente S de l'installation : $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Des résultats précédents, on déduit l'intensité du courant total absorbé par l'installation ainsi que le facteur de puissance global de l'installation :

$$I = \frac{S}{U} \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Voyons un exemple. Soit une installation alimentée sous une tension efficace de 230 V/50 Hz et comprenant :

- un moteur M_1 fournissant une puissance mécanique $P_1 = 1,5$ kW, de facteur de puissance $\cos \varphi = 0,85$ et de rendement $\eta = 0,72$;
- un moteur M_2 fournissant une puissance mécanique $P_2 = 0,75$ kW, de facteur de puissance $\cos \varphi = 0,77$ et de rendement $\eta = 0,66$;
- un poste de soudure de $P_3 = 8$ kW, de $\cos \varphi = 0,50$;
- un radiateur électrique de $P_4 = 1,5$ kW

On souhaite amener le facteur de puissance à $\cos \varphi = 0,93$, calculer la capacité du condensateur nécessaire. Le condensateur sera branché en parallèle avec l'installation.

Effectuons le bilan des puissances :

Récepteurs	P (kW)	Q (kVAR) $Q = P \times \tan \varphi$	S (kVA)
moteur M_1	$P = \frac{P_{\text{méca}}}{\eta} = \frac{1,5}{0,72} = 2,08$	$2,08 \times 0,62 = 1,29$	
moteur M_2	$\frac{0,75}{0,66} = 1,14$	$1,14 \times 0,855 = 0,972$	
poste de soudure	8	$8 \times 1,73 = 13,9$	
radiateur	1,5	0	
Total avant relèvement	12,72	16,2	$\sqrt{12,72^2 + 16,2^2} = 20,6$
Total après relèvement	12,72	$12,72 \times \tan(\arccos 0,93) = 5,02$	$\sqrt{12,72^2 + 5,02^2} = 13,68$

Avant relèvement, l'intensité totale absorbée par l'installation est :

$$I = \frac{S}{U} = \frac{20600}{230} = 89,6 \text{ A}$$

le facteur de puissance de l'installation est :

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{12,72 \cdot 10^3}{20,6 \cdot 10^3} = 0,617$$

Après relèvement du facteur de puissance à 0,93, l'intensité totale absorbée est :

$$I' = \frac{S'}{U} = \frac{13677}{230} = 59,46 \text{ A}$$

La puissance réactive que doit fournir le condensateur est : $\Delta Q = 16,16 - 5,02 = 11,14 \text{ kVAR}$

La capacité se calcule par l'égalité (voir la formule dans le tableau 2.3.6 page 48) :

$$\Delta Q = U^2 \cdot C \cdot \omega \implies C = \frac{\Delta Q}{U^2 \cdot \omega} = \frac{11,14 \cdot 10^3}{230^2 \times 314} \simeq 670 \mu\text{F}$$

2.5.3.2 Méthode vectorielle

Cette méthode est plus délicate que la précédente, car elle nécessite de dessiner des vecteurs écartés d'un certain angle ($\arccos \varphi$) d'où la nécessité d'utiliser règle et rapporteur, ou encore une règle Cras qui, outre son utilisation en navigation, s'avère être un excellent outil pour les calculs graphiques effectués ici dans le cadre de cette méthode vectorielle. De plus il faut représenter des vecteurs de manière à remplir le plus possible une feuille A4 afin d'améliorer la précision des lectures, en effet dans le domaine des calculs graphiques, plus un dessin est grand, meilleure est la précision.

La figure 2.11 montre que l'installation absorbe toujours le même courant actif (correspondant à l'absorption d'une puissance active constante), que la batterie de condensateurs soit branchée ou non.

$$\vec{I}_{\text{actif}} \text{ tel que : } I = \frac{P}{U \cos \varphi} \text{ et } (\vec{U}, \vec{I}) = -\varphi$$

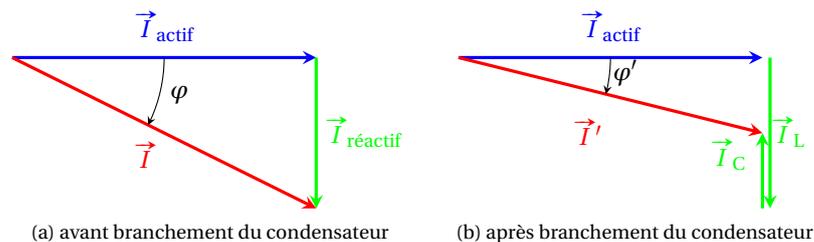
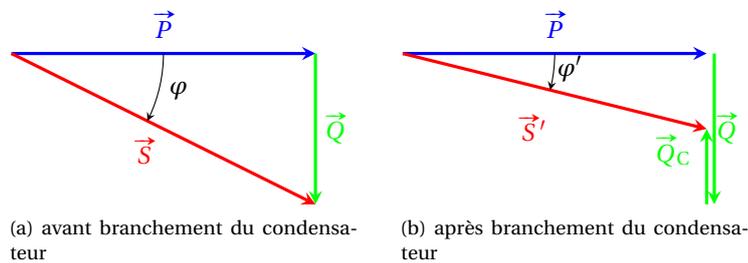


FIGURE 2.11 – Vecteur \vec{I} avant et après branchement d'un condensateur.

La figure 2.12 page ci-contre montre comment on en déduit les triangles des puissances avant et après le branchement de la batterie de condensateurs qui va permettre de remonter le $\cos \varphi$. Sur un dessin, on en déduit la puissance réactive nécessaire de la batterie de condensateur par lecture graphique.

FIGURE 2.12 – Vecteurs \vec{P} , \vec{Q} et \vec{S} avant et après branchement d'un condensateur.

Alfred et les kVA, exercice drolatique

Avertissement : Toute ressemblance avec des faits et des personnages existants ou ayant existé n'est pas du tout fortuite et n'est absolument pas une pure coïncidence.

Épisode n° 1

Alfred s'interroge sur l'abonnement qu'il doit souscrire auprès d'un fournisseur d'énergie électrique, 3 kVA, 6 kVA, 9 kVA ou 12 kVA ?

Une tension de 230 V – 50 Hz monophasée alimente la maison d'Alfred.

Alfred voudrait pouvoir faire fonctionner simultanément :

- un lave-linge de 2 kW dont le facteur de puissance est de 0,58 ;
- un lave-vaisselle de 2,5 kW dont le facteur de puissance est de 0,75 ;
- un réfrigérateur de 0,7 kW dont le facteur de puissance est de 0,60 ;
- un congélateur de 0,5 kW dont le facteur de puissance est de 0,60 ;

Tous ces appareils sont de nature inductive.

Vous allez aider Alfred à choisir son abonnement. De plus, lorsque tous les appareils sont en fonction, vous calculerez l'intensité totale au niveau de son compteur électrique ainsi que le facteur de puissance global.

Effectuons le bilan des puissances grâce au théorème de Boucherot :

Récepteurs	P (kW)	Q (kVAR) $Q = P \times \tan \varphi$	S (kVA)
lave-linge	2	2,81	
lave-vaisselle	2,5	2,2	
réfrigérateur	0,7	0,93	
congélateur	0,5	0,67	
Total	5,7	6,61	$\sqrt{5,7^2 + 6,61^2} = 8,73$

Alfred doit donc choisir un abonnement de 9 kVA.

L'intensité totale au niveau du compteur sera :

$$I = \frac{S}{U} = \frac{8,73 \cdot 10^3}{230} = 38 \text{ A}$$

Le facteur de puissance global sera de :

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{5,7 \cdot 10^3}{8,73 \cdot 10^3} = 0,65$$

Épisode n° 2

Un voisin plein de bonnes intentions se propose d'aider Alfred :

— Bon sang Alfred, 9 kVA ! Je peux faire en sorte que ton installation fonctionne avec un abonnement de seulement 3 kVA, ce sera moins cher.

— Ah bon ! Et comment vas-tu t'y prendre ?

— Dans l'usine où je travaille, certains condensateurs de relèvement de facteur de puissance viennent d'être changés. Les anciens condensateurs sont mis à la poubelle, pourtant ils sont encore en bon état. J'en ai récupéré quelques uns. Je vais en installer un chez toi. Après, tu pourras contacter ton fournisseur d'énergie électrique et lui demander de ramener ton abonnement au minimum, soit 3 kVA. Tu vas faire de sacrés économies grâce à moi !

Le voisin installe un condensateur de $1 \text{ mF} - 1 \text{ 500 V}$ en parallèle avec l'installation d'Alfred, juste après le compteur électrique.

L'abonnement d'Alfred a été ramené à 3 kVA, mais le disjoncteur placé par le fournisseur d'énergie ne tient pas fermé. Alfred redemande à son fournisseur d'énergie électrique de repasser son abonnement à 9 kVA. Le disjoncteur continue de s'ouvrir. De guerre lasse, Alfred demande à son voisin de venir retirer le condensateur qu'il avait installé.

Expliquer à Alfred et à son voisin ce qui s'est passé.

Un condensateur de 1 mF fournit une puissance réactive de :

$$Q_C = U^2 \cdot C \cdot \omega = 230^2 \times 1 \cdot 10^{-3} \times 314 = 16,6 \text{ kVA}$$

Cette valeur est supérieure aux abonnements de 3 et 9 kVA, le disjoncteur taré pour ces abonnements s'ouvre et reste ouvert. Il faudrait souscrire un abonnement supérieur à 16,6 kVA, mais le mieux est encore de retirer le condensateur qui n'a pas du tout été calculé pour compenser l'installation d'Alfred.

Même en compensant la puissance réactive de 6,6 kvar consommée par les appareils d'Alfred, il faudra tout de même les alimenter en leur fournissant une puissance de 5,7 kW ce qui représente la puissance apparente minimum qu'Alfred puisse souscrire. Il est donc parfaitement illusoire de faire croire à Alfred qu'il pourra ne souscrire qu'un abonnement de 3 kVA. Si l'installation d'Alfred ne consommait aucune puissance réactive, il lui faudrait tout de même souscrire au minimum un abonnement d'une puissance supérieure à 5,7 kW = 5,7 kVA, soit 6 kVA.

Pour compenser exactement l'énergie réactive consommée par les appareils d'Alfred, il faudrait placer, en parallèle avec son installation, un condensateur de :

$$C = \frac{Q}{U^2 \cdot \omega} = \frac{6,61 \cdot 10^3}{230^2 \times 314} = 0,398 \text{ mF}$$

Le voisin d'Alfred devrait réviser un peu ses cours d'électricité !