

Trigonométrie vs complexes en électricité

Notation de Steinmetz

Calculatrices

Claude Chevassu

11 juin 2025

1 Utilisation des nombres complexes en électricité

Lors de l'étude des tensions et courants alternatifs, on présente l'utilisation des nombres complexes comme étant plus simple que l'utilisation du calcul trigonométrique, mais faute de temps on ne donne pas d'exemple comparatif. Les lignes ci-dessous tentent de palier cette lacune.

Nous allons considérer un cas simple où il s'agit d'appliquer la loi des nœuds et d'additionner trois intensités. Le but n'est pas de faire du calcul littéral, mais d'obtenir une valeur numérique aussi facilement et rapidement que possible.

Considérons les trois intensités suivantes :

$$i_1 = 10 \sin(314t + 10^\circ) \text{ A}$$

$$i_2 = 20 \sin(314t + 20^\circ) \text{ A}$$

$$i_3 = 30 \sin(314t + 30^\circ) \text{ A}$$

1.1 Addition des intensités alternatives sans nombres complexes

En utilisant l'identité trigonométrique pour le sinus d'une somme :

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Nous pouvons écrire chaque intensité comme :

$$i_1 = 10 \sin(314t) \cos(10^\circ) + 10 \cos(314t) \sin(10^\circ)$$

$$i_2 = 20 \sin(314t) \cos(20^\circ) + 20 \cos(314t) \sin(20^\circ)$$

$$i_3 = 30 \sin(314t) \cos(30^\circ) + 30 \cos(314t) \sin(30^\circ)$$

L'intensité totale est :

$$\begin{aligned} i_{\text{total}} = & \sin(314t) (10 \cos(10^\circ) + 20 \cos(20^\circ) + 30 \cos(30^\circ)) \\ & + \cos(314t) (10 \sin(10^\circ) + 20 \sin(20^\circ) + 30 \sin(30^\circ)) \end{aligned}$$

Les coefficients sont :

$$10 \cos(10^\circ) + 20 \cos(20^\circ) + 30 \cos(30^\circ) \approx 54.62$$

$$10 \sin(10^\circ) + 20 \sin(20^\circ) + 30 \sin(30^\circ) \approx 23.58$$

Ainsi, l'intensité totale est :

$$i_{\text{total}} = 54.62 \sin(314t) + 23.58 \cos(314t)$$

L'amplitude et la phase sont :

$$A = \sqrt{(54.62)^2 + (23.58)^2} \approx 59.49$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{23.58}{54.62}\right) \approx 23.35^\circ$$

Donc, l'intensité totale est :

$$i_{\text{total}} = 59.49 \sin(314t + 23.35^\circ)$$

Ouf!

1.2 Addition des intensités alternatives avec nombres complexes

Les intensités sont représentées comme des nombres complexes :

$$i_1 = 10/\underline{10^\circ} \text{ A}$$

$$i_2 = 20/\underline{20^\circ} \text{ A}$$

$$i_3 = 30/\underline{30^\circ} \text{ A}$$

La somme des intensités est :

$$i_{\text{total}} = 10/\underline{10^\circ} + 20/\underline{20^\circ} + 30/\underline{30^\circ}$$

En utilisant une calculatrice permettant les calculs en complexe, on obtient :

$$\underline{I_{\text{total}}} \simeq 59,49/\underline{23.35^\circ} \text{ A}$$

Donc, l'intensité totale est :

$$i_{\text{total}} = 59.49 \sin(314t + 23.35^\circ)$$

1.3 Conclusion

Les deux méthodes, celle utilisant les nombres complexes et celle utilisant la trigonométrie, aboutissent au même résultat. Cependant, la méthode utilisant les nombres complexes est généralement considérée comme plus simple et plus concise en termes de calculs et de manipulation mathématique. Voici pourquoi :

Simplicité conceptuelle : Les nombres complexes encapsulent à la fois l'amplitude et la phase en un seul objet mathématique, ce qui simplifie les opérations d'addition et de soustraction.

Calcul direct : L'addition des nombres complexes se fait directement, sans avoir besoin de décomposer et recomposer les termes trigonométriques.

Moins d'étapes : La méthode des nombres complexes nécessite moins d'étapes intermédiaires pour obtenir le résultat final.

En résumé, bien que les deux méthodes soient valides, l'utilisation des nombres complexes est généralement préférée pour sa simplicité et son efficacité, surtout lorsque l'on travaille avec des systèmes ou des signaux sinusoïdaux.

2 Notation de Steinmetz

La notation de Steinmetz permet d'écrire un nombre complexe en n'écrivant que ce qui intéresse l'électricien, à savoir l'amplitude et la phase. En effet, la pulsation $\omega = 2\pi f$ est commune à toutes les tensions et à tous les courants d'un circuit, ce n'est pas une information pertinente permettant de différencier des tensions entre elles, des courants entre eux ou encore des impédances entre elles.

Par exemple, un courant écrit de manière conventionnelle :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \theta)$$

peut être écrit en notation exponentielle complexe de la manière suivante :

$$i(t) = \Re\{I_0 e^{j(\omega t + \theta)}\} = \Re\{I_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}\},$$

et sous forme polaire complexe ainsi :

$$i(t) = \Re\{I_0 / \theta e^{j\omega t}\}.$$

Ces notations sont lourdes !

Nous pouvons *simplifier* la notation en ne faisant pas figurer la donnée commune à tous les nombres complexes (toutes les tensions et les courants sont à la même pulsation ω). Ainsi, nous ne noterons plus le terme : $e^{j\omega t}$, pas plus que nous ne noterons l'indication évidente $\Re\{ \}$, pour adopter la notation de Steinmetz ou la notation « phaseur » :

$$\underline{I} = \Re\{I_0 e^{j\theta}\} = \Re\{I_0(\cos \theta + j \sin \theta)\}$$

devient avec la notation de Steinmetz :

$$\underline{I} = I_0 \underline{\angle \theta}$$

l'écriture est tout de même beaucoup plus simple !

IMPORTANT : en électricité, l'amplitude du nombre complexe d'une tension ou d'un courant est la valeur efficace, seule la valeur efficace d'une tension ou d'un courant intéresse l'électricien ! Ainsi, l'intensité complexe précédente se notera :

$$\underline{I} = I_{\text{efficace}} \underline{\angle \theta}$$

On écrira par exemple :

$$\underline{I} = 50 \underline{\angle -30^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{U} = 230 \underline{\angle 60^\circ} \text{ V}$$

avec 50 A la valeur efficace de l'intensité et 230 V la valeur efficace de la tension.

Le fait de souligner une grandeur comme le courant $\underline{I}$ nous indique que le phaseur $\underline{I}$ est bien un nombre complexe. La [commission électrotechnique internationale](#) préconise de souligner les grandeurs électriques complexes et de ne pas mettre une barre au-dessus comme cela se faisait il y a une cinquantaine d'années.

Quelques exemples d'impédances complexes $\underline{Z} = \frac{V}{I}$:

Pour un circuit élémentaire, nous avons :

- Resistance, R : $\underline{Z} = R$;
- Inductance, L : $\underline{Z} = j\omega L = \omega L \underline{\angle 90^\circ}$;

- Condensateur, C : $\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$;
- Condensateur, C : $\underline{Z} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$;
- Condensateur, C : $\underline{Z} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$

2.1 En résumé

La notation de Steinmetz avec $\angle 10^\circ$ n'apporte pas de nouvelle information mathématique par rapport aux phaseurs classiques, mais elle améliore fortement la lisibilité, la standardisation et la clarté typographique, ce qui est précieux en électricité, notamment :

- dans les rapports techniques ;
- les manuels pédagogiques ;
- les schémas avec plusieurs grandeurs en phase/déphasage.

Elle est donc plus ergonomique et adaptée aux ingénieurs et aux praticiens que la notation complexe traditionnelle.

Pourtant des livres d'électrotechnique parus en France en 2018 continuent à adopter des notations inutilement lourdes et des phases indiquées en radians alors que les degrés sont la règle chez les électriciens. Ainsi, dans certains ouvrages on peut lire :

$$\underline{I}_R = \frac{V}{100} = 0,02 \exp(j\frac{\pi}{6})$$

La résistance est traversée par un courant de valeur efficace 0.02 A = 2 mA et de phase $\pi/6$ rad.

là où il suffirait d'écrire :

$$\underline{I}_R = 2 \angle 30^\circ \text{ mA}$$

Les phaseurs avec la notation de Steinmetz simplifient l'écriture, ne nous en privons pas !

3 Steinmetz mode d'emploi en L^AT_EX

La notation de Steinmetz nécessite le chargement du package « steinmetz » avec L^AT_EX :

`\usepackage{steinmetz}`

La ligne plus haut est obtenue ainsi :

`\underline{I}_R = 2 \phase{\qty{30}{\degree}} \; \unit{\milli\ampere}`

4 Calculatrices

Pour aller au bout de la démarche de Steinmetz, il faut disposer d'un outil permettant de calculer facilement avec des nombres complexes. Par exemple de pouvoir diviser une tension saisie en notation de Steinmetz par une impédance saisie sous forme algébrique, sans avoir besoin auparavant de la convertir sous forme polaire elle aussi. Il s'agit des calculatrices TI 36X PRO¹ et Casio 991 ES- PLUS. Ces deux calculatrices ne sont pas programmables et sont donc autorisées aux examens et concours. Elles permettent d'ailleurs une saisie plus simple que nombre de calculatrices plus performantes où il est nécessaire de passer par la notation exponentielle. Ces deux calculatrices sont équivalentes au point de vue performance et facilité d'utilisation. Ma préférence va cependant à la Casio qui ne nécessite pas d'utiliser deux touches $-$, une pour les soustractions et une pour saisir une quantité négative.

[Cette vidéo](#) explique comment régler la Casio 991 ES-PLUS pour effectuer des calculs en complexes.

[Cette vidéo](#) explique comment régler la TI 36X PRO pour effectuer des calculs en complexes.

Cerise sur le gâteau, ces calculatrices étant équipées d'une photopile n'ont pas besoin de piles (piles qui sont évidemment vides le jour du contrôle selon la loi de l'embêtement maximum...)

En 2025, ces calculatrices coûtent une vingtaine d'euros. Il faut davantage farfouiller sur Internet pour dénicher la Casio à ce prix là que pour dénicher la TI, mais on y arrive.

1. TI = Texas Instrument