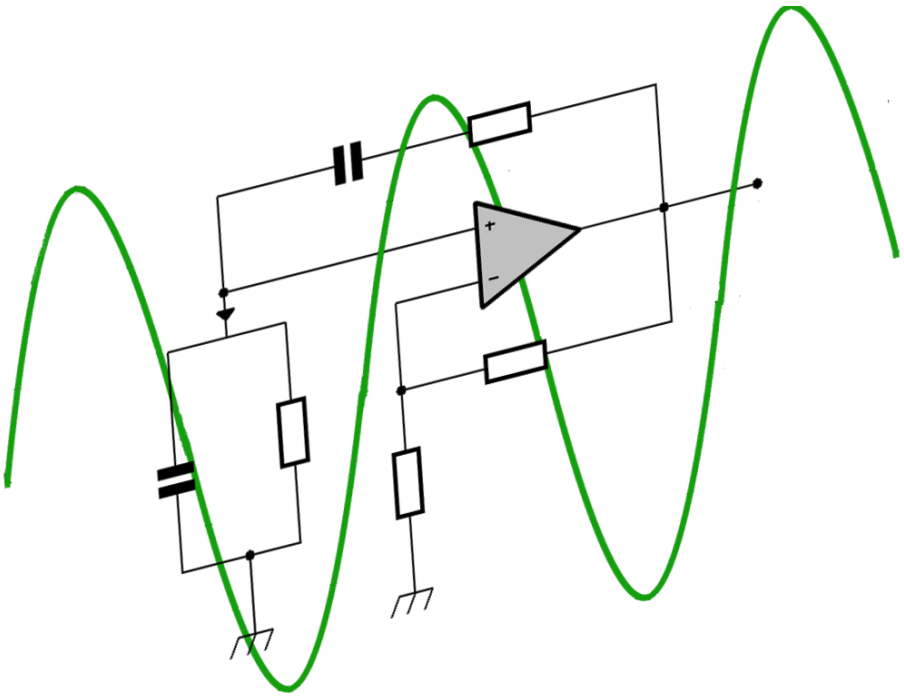
O1MM 2e année

De l'art de faire gigoter les électrons

Oscillateurs électroniques

Claude Chevassu



version du 17 février 2012

Table des matières

Introduction **iii**

0.1 Introduction iii

1 Oscillateurs de relaxation **1**

1.1 Multivibrateur astable 1

1.1.1 Multivibrateur astable à transistor bipolaire 1

1.1.2 Multivibrateur astable à amplificateur opérationnel 4

1.1.3 Multivibrateur astable à portes logiques 6

2 Oscillateurs quasi sinusoïdaux **11**

2.0.4 Oscillateur bouclé 11

2.0.5 Oscillateur à pont de Wien 12

2.0.6 Oscillateur à réseau déphaseur 16

A Quadripôles **21**

A.1 Matrices de transfert élémentaires 21

A.1.1 Matrice de transfert de Q_l 22

A.1.2 Matrice de transfert de Q_t 22

A.2 Matrice de transfert d'une association de quadripôles en cascade 22

B Amplificateurs Opérationnels **25**

B.0.1 Fonctionnement non linéaire de l'AO 25

B.0.2 Fonctionnement linéaire de l'AO 26

B.0.3 Cas de deux rebouclages simultanés 26

Introduction

0.1 Introduction

Copyleft : ce manuel est libre selon les termes de la Licence Libre :

`http://cesarx.free.fr/gfdlf.html`

Ce cours est sous « licence libre », c'est à dire qu'il peut être copié et qu'il peut être diffusé à condition :

- d'indiquer qu'il est sous la Licence Libre ;
- d'indiquer le nom de l'auteur de l'original : Claude Chevassu et de ceux qui auraient apporté des modifications ;
- d'indiquer que les sources peuvent être téléchargés sur `http://mach.elec.free.fr`.

Enfin vous pouvez le modifier à condition :

- de respecter les conditions de diffusion énoncées ci-dessus ;
- d'indiquer qu'il s'agit d'une version modifiée et d'indiquer la nature et la date de la modification ;
- de diffuser vos modifications sous la même licence.

Ce cours a été rédigé en utilisant LaTeX sur un PC dont le système d'exploitation est Linux Ubuntu. TikZ et surtout CircuiTikZ ont été utilisés pour la réalisation des schémas électroniques, The Gimp a servi pour la retouche des quelques images scannées.

Les oscillateurs électroniques sont des circuits qui produisent des tension et des courants alternativement croissants et décroissants, le plus souvent périodiques. Ils tiennent un rôle essentiel en électronique comme élément fondamentaux pour la production, le transport et la détection de l'information. Ils sont aussi utilisés pour mesurer des durées et réaliser des compteurs. On les retrouve en modulation et démodulation ainsi qu'en électronique numérique.

Nous n'étudierons que les oscillateurs auto-entretenus qui comprennent les oscillateurs quasi-sinusoïdaux et les oscillateurs de relaxation.

Ce fascicule doit beaucoup à [PBFL03].

Chapitre 1

Oscillateurs de relaxation

Les oscillations de *relaxation* sont des signaux qui peuvent prendre deux valeurs au cours du temps, l'une haute, l'autre basse. La durée de chacun de ces deux niveaux est très supérieure à celle nécessaire à la transition entre ces niveaux. Les signaux engendrés sont quasiment rectangulaires.

1.1 Multivibrateur astable

1.1.1 Multivibrateur astable à transistor bipolaire

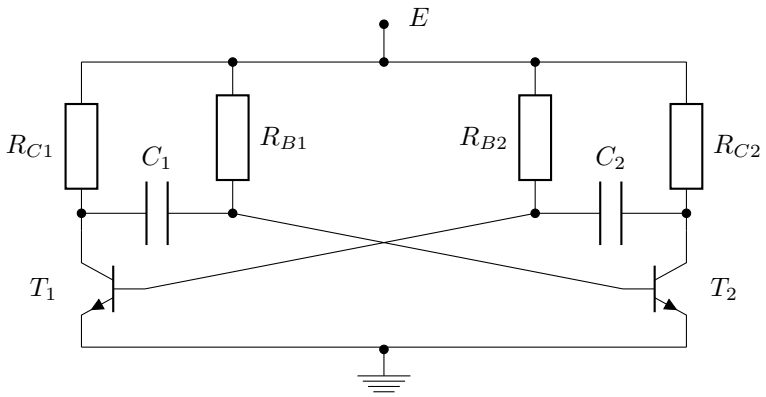


FIGURE 1.1 – Astable à transistor bipolaire.

Les deux transistors sont couplés par deux condensateurs qui relient le collecteur de l'un à la base de l'autre. Les valeurs des résistances sont choisies pour assurer la saturation complète des transistors.

1.1.1.1 Fonctionnement

Nous ferons l'hypothèse qu'à l'instant $t_1 - \epsilon$, T_1 est bloqué et que T_2 est saturé. En t_1, on suppose que la base de T_1 devient légèrement positive : T_1 se

sature et son potentiel de collecteur diminue brutalement. Comme le potentiel V_{C_1} passe de E à 0, le potentiel V_{B_2} passe de V_{BE} (voisin de 0,6 V) à $-E + V_{BE}$ car la charge $Q = C_1 \cdot U$ du condensateur n'a pas le temps de varier pendant la durée de la transition. Le potentiel de la base de T_2 devenant négatif, celui-ci se bloque. Le potentiel de son collecteur augmente et évolue vers E. Le condensateur C_2 se charge à travers R_{C_2} et l'espace base émetteur du transistor T_1 (qui est alors saturé) avec une constante de temps égale à $\tau_2 = R_{C_2}.C_2$. Le potentiel de la base de T_1 reste légèrement positif ce qui assure le maintien de sa saturation. Après le blocage de T_2, le potentiel de sa base V_{B_2} croît de $-E+V_{BE}$ à V_{BE} avec une constante de temps $\tau_1 = R_{B_1} \cdot C_1$ car le condensateur C_1 se charge à travers R_{B_1} et l'espace collecteur émetteur de T_1 qui est saturé. Quand V_{B_1} dépasse la tension de seuil $V_{BE} \approx 0{,}7$ V le système bascule vers son autre état. Le système oscille en permanence entre ces deux états instables. La figure 1.2 représente l'évolution des potentiels des collecteurs et l'évolution des potentiels des bases des deux transistors en fonction du temps.

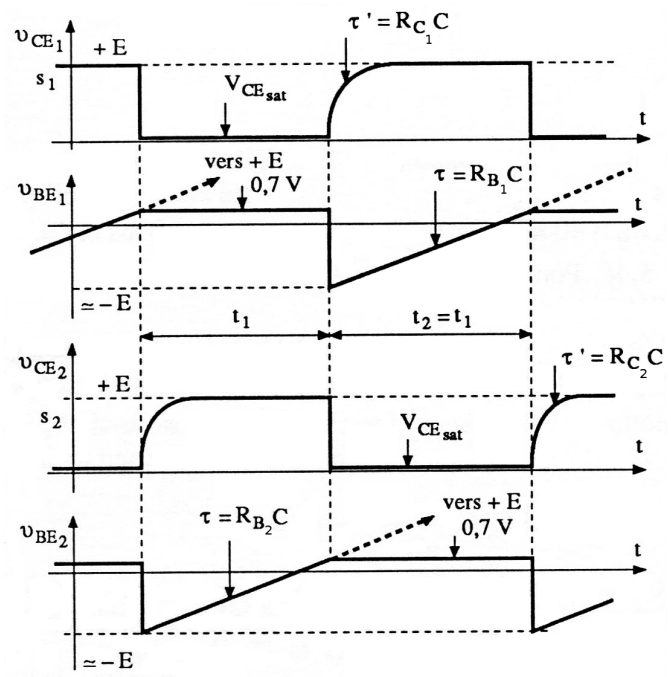


FIGURE 1.2 – Différentes tensions au sein d'un astable à transistor bipolaire.

La saturation est très rapide mais le blocage est progressif à cause de la durée de charge des condensateurs à travers les résistances de collecteurs. Sur chaque collecteur, on obtient un signal de sortie qui est pratiquement rectangulaire. La période et le rapport cyclique (rapport entre les durées des états hauts et des états bas) sont des fonctions des valeurs des résistances des bases et des condensateurs de couplage.

Dans le calcul qui suit, on suppose que la tension de seuil V_{BE} des jonctions base émetteur et la tension de saturation des transistors sont nulles. On prend comme origine des temps l'instant auquel T1 se sature.

L'équation de la charge de C_1 (voir figure 1.2) est :

$$u(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{R_{B_1} \cdot C_1}} + B$$

Déterminons les constantes A et B à l'aide des valeurs prises par $u(t)$ lorsque $t = 0$ et $t \to \infty$.

Lorsque $t = 0$, T_1 vient de se saturer, le potentiel de son collecteur est devenu proche de 0 (à 0,1 V près), chutant ainsi de E. Le potentiel de l'armature droite de C_1 chute donc instantanément de E et se retrouve à $0 - E = -E$ ($0,7 - E$ en fait). A cet instant $t = 0$, on a donc :

$$u(0) = A \cdot e^{-\frac{0}{R_{B_1} \cdot C_1}} + B = -E \Rightarrow A + B = -E$$

Lorsque $t \to \infty$, en admettant que la charge de C_1 puisse se poursuivre sans entrave (ce qui serait le cas si T_2 était retiré du montage après $t = 0$), C_1 se chargerait complètement et le potentiel de l'armature droite atteindrait $+E$. On aurait donc :

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{t \to \infty} A \cdot e^{-\frac{t}{R_{B_2} \cdot C_1}} + B = E \Rightarrow B = E$$

Ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} A + B = -E \\ B = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2E \\ B = E \end{cases}$$

L'équation de la charge de C_1 est donc :

$$u(t) = -2E \cdot e^{-\frac{t}{R_{B_1} \cdot C_1}} + E = E\left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{t}{R_{B_1} \cdot C_1}}\right)$$

Le système bascule dans l'autre état au temps t_1 tel que : $u(t_1) = V_{B_2} = 0$. On en déduit le temps mis par l'armature droite de C_1 pour passer de $-E$ à 0. En fait il faudrait calculer le temps mis par l'armature droite pour atteindre 0,7 V. Cela conduirait à un résultat plus exact, mais à une expression moins simple.

$$\begin{aligned} u(t) &= E\left(1 - 2 \cdot e^{-\left(\frac{t}{R_{B_1} \cdot C_1}\right)}\right) = 0 \\ &\Rightarrow 1 - 2 \cdot e^{-\left(\frac{t}{R_{B_1} \cdot C_1}\right)} = 0 \\ &\Rightarrow e^{-\left(\frac{t}{R_{B_1} \cdot C_1}\right)} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow -\left(\frac{t}{R_{B_1} \cdot C_1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow t_1 = R_{B_1} \cdot C_1 \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$t_1 \simeq 0,7 \times R_{B_1} \times C_1$$

On calcule de même la durée de la mise en saturation de T_2. Ainsi , la période d'oscillation du multivibrateur astable est donc voisine de :

$$T = t_1 + t_2 \simeq 0,7 \times (R_{B_1} \times C_1 + R_{B_2} \times C_2)$$

Cette valeur est approchée car le basculement se produit en réalité quand le potentiel de base dépasse la tension de seuil de la jonction base émetteur, soit 0,7 V et non 0 V.

1.1.2 Multivibrateur astable à amplificateur opérationnel

Le *multivibrateur astable*, ainsi appelé en raison de son instabilité, est un oscillateur de relaxation, c'est à dire un système à deux états. Il est constitué par l'association d'un filtre passif passe-bas du premier ordre et d'un comparateur à hystérésis comme le montre la figure 1.3. Dans ce montage, l'amplificateur opérationnel (AO) (voir annexe B, page 25) fonctionne en comparateur, on supposera que la boucle de retour sur l'entrée + possède un gain supérieur au gain de la boucle de retour sur l'entrée −. Les tensions d'alimentation de l'amplificateur opérationnel sont $+U_{sat}$ et $-U_{sat}$.

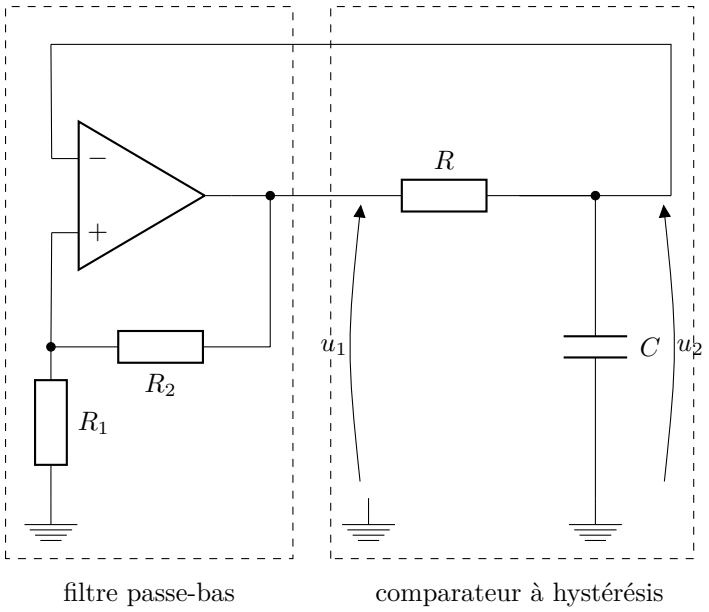


FIGURE 1.3 – Astable à amplificateur opérationnel.

Étudions le fonctionnement du multivibrateur en régime établi. L'amplificateur opérationnel étant supposé idéal, son impédance d'entrée est infinie. Les équations qui relient la tension d'entrée u_1 à la tension de sortie u_2 du filtre s'écrivent :

$$u_1 - u_2 = R \cdot i \quad \text{et} \quad i = C \cdot \frac{du_2}{dt}$$

d'où l'équation différentielle entre u_1 et u_2 :

$$u_1 = RC \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2$$

Considérons un instant origine où la tension de sortie du comparateur à hystérésis bascule de l'état bas vers l'état haut ; la tension d'entrée du filtre vaut : $u_1(0) = U_{sat}$, alors qu'en sortie : $u_2(0) = -\frac{R_1}{R_1+R_2}\, U_{sat}$.

Tant que $u_1 = U_{sat}$, l'évolution de u_2 est donnée par :

$$u_2(t) = U_{sat} + k \times e^{-\frac{t}{RC}} = U_{sat} - \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) U_{sat}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

en tenant compte de la valeur initiale.

Le comparateur bascule à nouveau, à l'instant t_1 tel que $u_2(t_1) = \frac{R_1}{R_1+R_2}\, U_{sat}$:

$$t_1 = RC \ln\left(2\frac{R_1}{R_2} + 1\right)$$

La tension de sortie du comparateur devient $u_1 = -U_{sat}$ et l'évolution de u_2 satisfait alors l'équation :

$$-U_{sat} = RC \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2$$

laquelle s'intègre comme précédemment, mais en tenant compte de la nouvelle valeur initiale $u_2(t_1)$:

$$u_2(t) = -U_{sat} + k' \times e^{-\frac{t}{RC}} = -U_{sat} + \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)\, e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

La première période s'achève alors à l'instant t_2 lorsque le comparateur bascule :

$$u_2(t_2) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

soit :

$$t_2 = t_1 + RC \ln\left(2\frac{R_1}{R_2} + 1\right)$$

Si les tensions d'alimentation de l'AO sont symétriques, les signaux obtenus le sont aussi. La période des oscillations s'en déduit aisément :

$$T = RC \ln\left(2\frac{R_1}{R_2} + 1\right) + RC \ln\left(2\frac{R_1}{R_2} + 1\right) = 2RC \ln\left(2\frac{R_1}{R_2} + 1\right)$$

Les amplitudes des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ ont alors pour expressions respectives : U_{sat} et $U_{sat} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$.

La tension $u_2(t)$ a la forme d'une *dent de scie* tandis que $u_1(t)$ est rectangulaire.

1.1.3 Multivibrateur astable à portes logiques

Les astables à amplificateur opérationnel sont limités en fréquences, le circuit astable à circuits logiques CMOS de la figure 1.4 permet la réalisation de générateur de signaux carrés à fréquences plus élevées.

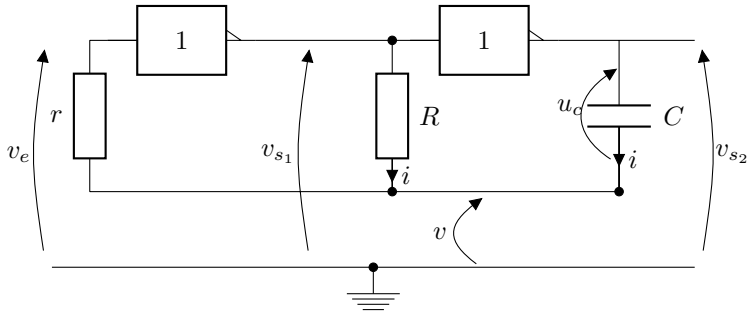


FIGURE 1.4 – Astable à circuits logiques CMOS.

1.1.3.1 Fonctionnement

Les caractéristiques de transfert des fonctions logiques seront supposées être celles données par la figure 1.5. Les courants d'entrée d'une porte logique seront considérés comme étant nuls.

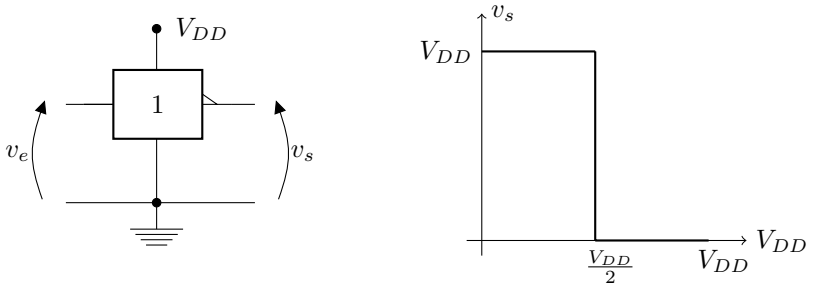


FIGURE 1.5 – Montage et caractéristique de transfert d'une porte inverseuse en technologie CMOS.

Les équations de fonctionnement sont donc :

$$v_e = v$$

$$v - u_C = v_{s_2}$$

$$i = \frac{v_{s_1} - v}{R}$$

À l'instant $t = 0^-$, on suppose : $v_e = 0$, par conséquent :

$v = 0$, $v_{s_1} = V_{DD}$, $u_c = 0$, $v_{s_2} = 0$, $i = \frac{V_{DD}}{R}$

À partir de $t = 0^+$, le circuit peut être représenté par celui de la figure 1.6.

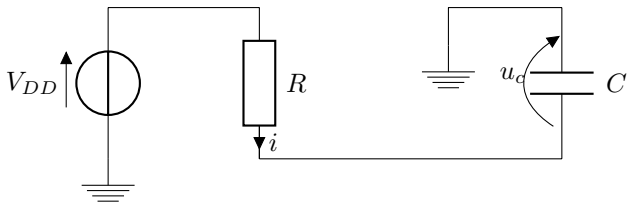


FIGURE 1.6 – Astable à circuits logiques CMOS : fonctionnement dans la première partie de la période.

La différence de potentiel aux bornes du condensateur évolue vers V_{DD}, selon l'expression :

$$u_c(t) = V_{DD}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Les équations de fonctionnement deviennent donc :

$$v_{s_1} = V_{DD}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_c = V_{DD}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ v_{s_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v = v_{s_2} + u_c = V_{DD}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i = \frac{V_{DD} - V_{DD}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{R}$$

À l'instant $t = t_1^-$, la tension $v = v_e$ prend la valeur $V_{TH} = \frac{V_{DD}}{2}$, seuil de basculement de la porte de gauche et les équations deviennent alors :

$v = v_e = \frac{3V_{DD}}{2}$, $v_{s_1} = 0$, $u_c = \frac{V_{DD}}{2}$, $i = -\frac{3V_{DD}}{2R}$, $v_{s_2} = V_{DD}$

À partir de $t = t_1^+$, le circuit peut être représenté par celui de la figure 1.7.

La différence de potentiel aux bornes du condensateur est : $E_0 = \frac{V_{DD}}{2}$, il se charge de telle sorte que la différence de potentiel évolue vers $-V_{DD}$ (orientation de la tension). Soit :

$$u_c = \frac{V_{DD}}{2} e^{-\frac{t-t_1}{RC}} + V_{DD}\left(e^{-\frac{t-t_1}{RC}} - 1\right)$$

La différence de potentiel aux bornes du condensateur, tout comme sa charge, sont des fonctions continues du temps. Le potentiel de l'armature supérieure

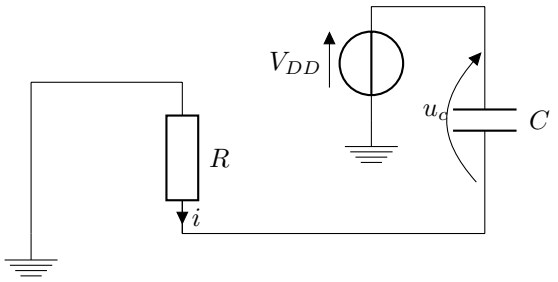


FIGURE 1.7 – Astable à circuits logiques CMOS : fonctionnement dans la deuxième partie de la période.

passe de $v_{s_2} = 0$ à $t = 0$ à $v_{s_2} == V_{DD}$ à $t = t_1 = 0$, afin que la d.d.p. soit une fonction continue du temps, le potentiel de l'armature inférieure doit subir les mêmes variations que celles de l'armature supérieure ? L'armature inférieure passe donc de $\frac{V_{DD}}{2}$ à $\frac{V_{DD}}{2} - V_{DD} = -\frac{V_{DD}}{2}$.

Les équations de fonctionnement deviennent :

$$v_{s_1} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{s_2} = 0 \\ u_c = \dfrac{V_{DD}}{2} e^{-\frac{t-t_1}{RC}} + V_{DD}\left(e^{-\frac{t-t_1}{RC}} - 1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow v = e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\left(\frac{3V_{DD}}{2}\right)$$

$$i = -\frac{3V_{DD}}{2R} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

À l'instant $t = t_2^-$, la tension v atteint le seuil de basculement de la porte de gauche, soit $V_{TH} = \frac{V_{DD}}{2}$, et :

$v(t_2 - \epsilon) = v_e(t_2 - \epsilon) = \frac{V_{DD}}{2}$, $v_{s_1} = 0$, $u_c = v - v_{s_2} = -\frac{V_{DD}}{2}$, $i = -\frac{V_{DD}}{2R}$

À $t = t_2^+$, les grandeurs ont pour valeur, juste après le basculement :

$v_{s_1} = V_{DD}$, $v_{s_2} = 0$, $u_c = -\frac{V_{DD}}{2}$, $v = v_e = -\frac{V_{DD}}{2}$ et $i = \frac{3V_{DD}}{2R}$

À partir de cet instant $t = t_2^+$ le circuit peut être représenté par le schéma de la figure 1.6. La tension aux bornes du condensateur est :

$$u_c = -\frac{V_{DD}}{2} e^{-\frac{t-t_2}{RC}} + V_{DD}\left(1 - e^{-\frac{t-t_2}{RC}}\right)$$

et les équations de fonctionnement sont :

$$v_{s_1} = V_{DD}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{s_2} = 0 \\ u_c = -\dfrac{V_{DD}}{2} e^{-\frac{t-t_2}{RC}} + V_{DD}\left(1 - e^{-\frac{t-t_2}{RC}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow v = v_{s_2} + u_c = u_c$$

$$i = \frac{3V_{DD}}{2R} \cdot e^{-\frac{t-t_2}{RC}}$$

À $t = t_3$, la tension $v = v_e$ atteint la valeur $\frac{V_{DD}}{2}$ et le système se retrouve dans l'état électrique du début.

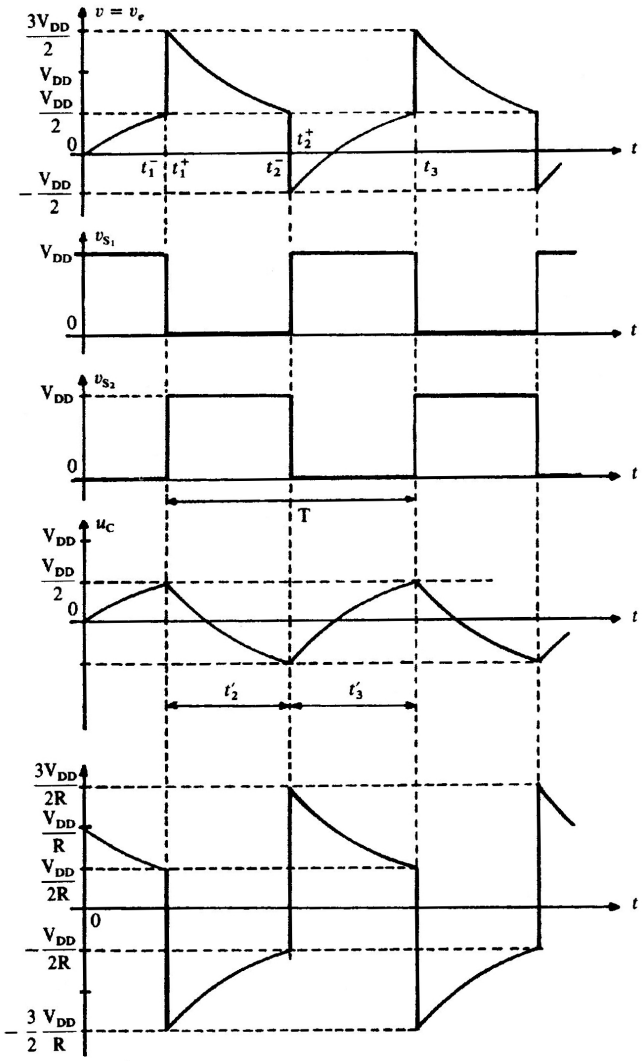


FIGURE 1.8 – Chronogramme des grandeurs de l'astable à CMOS.

1.1.3.2 Période des signaux

La durée $[0, t_1^-]$ correspond au régime transitoire, et au-delà, le circuit est en régime permanent.

Effectuons un changement d'origine en t_1 et calculons t'_2 tel que :

$$u_c(t_2') = -\frac{V_{DD}}{2} = +\frac{V_{DD}}{2} \cdot e^{-\frac{t_2'}{RC}} + V_{DD}\left(-1 + e^{-\frac{t_2'}{RC}}\right)$$

soit : $t_2' = RC_l n3$.

La durée pendant laquelle v_{s_2} est au niveau bas est t_3' telle que :

$$t_3' = t_2' = RC \ln 3$$

La période des signaux est :

$$T = t_2' + t_3' = 2RC \ln 3$$

La fréquence est : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2RC \ln 3}$

Chapitre 2

Oscillateurs quasi sinusoïdaux

Deux méthodes permettent d'obtenir des oscillations quasi sinusoïdales :
- l'association en *boucle* d'un amplificateur et d'un circuit sélectif (un filtre) ;
- l'association d'un dipôle dont la caractéristique présente une portion à *résistance négative* dans un circuit résonnant.

2.0.4 Oscillateur bouclé

L'association d'un amplificateur et d'un filtre forme un système bouclé qui peut être représenté, en régime linéaire et harmonique, par une chaîne directe et par une chaîne de retour comme le montre la figure 2.1. Le rôle des chaînes directe et de retour peut être permuté. On a cependant l'habitude d'associer la chaîne directe à l'amplificateur.

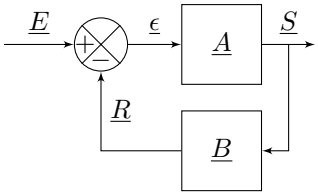


FIGURE 2.1 – Schéma bloc d'un oscillateur quasi sinusoïdal, rebouclage soustractif.

Déterminons la valeur de $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E}$ et des deux fonctions de transfert $\underline{A}$ et $\underline{B}$ dans le schéma de la figure 2.1 :

$$\underline{S} = \underline{A} \cdot \underline{\epsilon}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{E} - \underline{B} \cdot \underline{S}$$

d'où :

$$\underline{S} = \underline{A} \cdot \underline{E} - \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{S} \Rightarrow \underline{S} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A} \cdot \underline{B}} \cdot \underline{E}$$

Si $\underline{A} \cdot \underline{B} = -1$ alors $\frac{\underline{A}}{1+\underline{A}\cdot\underline{B}} \to \infty$ dès lors, S existe même si $E \to 0$.

$E = 0$, $S \neq 0$, les montages sont des oscillateurs.

Remarque : Il faut faire attention, l'énergie nécessaire à la création d'oscillations ne provient pas du vide. On ne sait pas encore extraire de l'énergie du vide (le saurons-nous jamais ?), les « extracteurs de point zéro (EDPZ) » chers à la série « Star Gate » ne sont, hélas, que des chimères de science-fiction. L'énergie du signal de sortie provient tout simplement des sources de tension continue alimentant l'étage amplificateur.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = -1 \Rightarrow \begin{cases} |\underline{A} \cdot \underline{B}| = 1 \\ arg(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \pi \end{cases}$$

Cela donne :

- une condition de pulsation $arg(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \pi$;
- une condition d'entretien des oscillations $|\underline{A} \cdot \underline{B}| = 1$.

Ces deux conditions sont connues sous le nom de « critères de Barkhausen [1] ».

Si le rebouclage se fait en additionnant le signal de retour comme le montre la figure 2.2, un calcul analogue donnera comme condition d'oscillation :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = +1$$

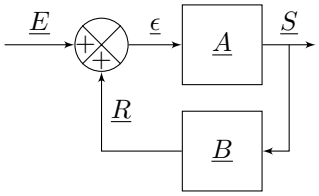


Figure 2.2 – Schéma bloc d'un oscillateur quasi sinusoïdal, rebouclage additif.

2.0.5 Oscillateur à pont de Wien

Cet oscillateur est représenté à la figure 2.3 dans laquelle on reconnaît un AO monté en amplificateur non inverseur dans la chaîne directe. La chaine de retour est constituée par un filtre de Wien [2].

1. Heinrich Georg Barkhausen : ingénieur allemand, né à Brême en 1881 et mort à Dresde en 1956. Après des études d'ingénieur, il est nommé en 1911 professeur de physique à l'université de Dresde. Il est connu en électronique pour avoir produit, avec son collègue K. Kurz, des micro-ondes en faisant osciller le courant dans une triode à vide. En physique, il a étudié et mis en évidence, par voie acoustique, le processus d'aimantation des corps ferromagnétiques.

2. Max Wien : physicien allemand, né en 1866 à Könisberg et mort à Iena en 1938. Nommé professeur à l'École Technique de Dantzig en 1904, puis à l'Université d'Iena en 1911. Il travaille sur les oscillateurs électriques et sur la télégraphie sans fil ; son nom est associé à l'oscillateur bien connu et au filtre de particules utilisé en optique corpusculaire. Il ne faut pas le confondre

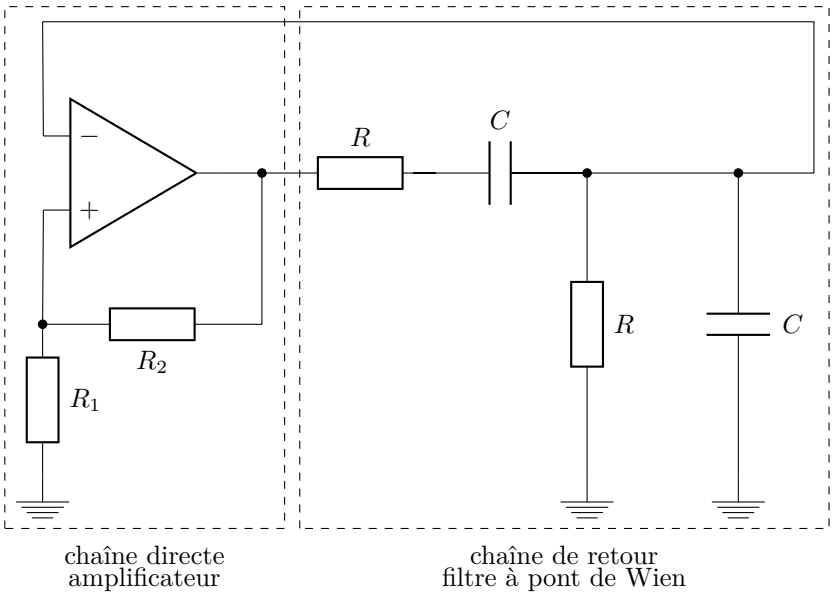


FIGURE 2.3 – Oscillateur à pont de Wien.

2.0.5.1 Fonction de transfert du filtre de Wien

Le filtre de Wien est un filtre passe-bande d'ordre deux constitué de deux résistors et de deux condensateurs identiques, disposés comme le montre la figure 2.4

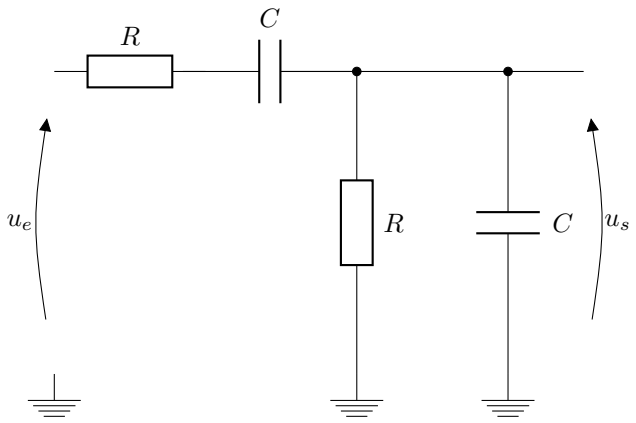


FIGURE 2.4 – Filtre à pont de Wien.

Établissons l'expression de la fonction de transfert du filtre de Wien, en le considérant comme un diviseur de tension :

---

avec Wilhem Wien, connu lui pour avoir donné son nom à une loi sur le rayonnement du corps noir

$$H(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + Z_1/Z_2}$$

avec : $Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}$ et $Z_2 = \frac{R/(jC\omega)}{R+1/(jC\omega)} = \frac{R}{1+jRC\omega}$

Il vient, en effectuant :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} \times \frac{1 + jRC\omega}{R} = \frac{1 - R^2C^2\omega^2 + j2RC\omega}{jRC\omega} = 2 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \text{ où } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

On en déduit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{3 + j(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} = \underline{B}$$

En introduisant la fréquence réduite $x = \omega/\omega_0 = f/f_0$, on obtient :

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{3 + j(x - 1/x)}$$

ou :

$$\underline{H}(x) = \frac{1/3}{1 + (1/3)(jx + (jx)^{-1})}$$

Ainsi :

$$|\underline{H}(x)| = \frac{1}{[9 + (x - 1/x)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \varphi = -arctan\left(\frac{x - 1/x}{3}\right)$$

2.0.5.2 Fonction de transfert de l'amplificateur

L'amplificateur à amplificateur opérationnel (voir annexe B, page 25) de la figure 2.5 est rebouclé sur la borne d'entrée $-$, par conséquent, le fonctionnement de l'AO est linéaire et $v_e = v_+ = v_- = v_{R_1}$.

La d.d.p. aux bornes de R_2 est donc : $v_s - v_- = v_s - v_e = R_2 \cdot i_2$

Or, $i_2 = i_1 = \frac{v_e}{R_1}$, car il n'y a pas de courant fourni ou absorbé par les entrées d'un AO, donc :

$$v_s - v_e = R_2 \cdot \frac{v_e}{R_1} \Rightarrow \frac{v_s}{v_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \underline{A}$$

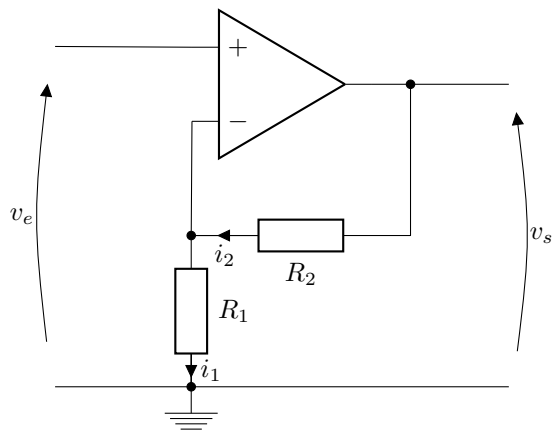


FIGURE 2.5 – Amplificateur à AO.

2.0.5.3 Critère de Barkhausen appliqué à l'oscillateur à pont de Wien

Le rebouclage s'effectue sur la borne + de l'AO, ainsi le critère de Barkhausen sera :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = +1 \Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{1}{3 + j(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} = +1$$

ou :

$$3 + j(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

Le membre de droite est un nombre réel pur, par conséquent, la partie imaginaire du membre de gauche doit être nulle. Nous devrons donc avoir :

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} = 3 \quad \text{et} \quad \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = 0$$

soit encore :

$$R_1 = 2R_2 \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

La réalisation expérimentale précise de ce critère n'est guère possible. Deux cas de figure se présentent :

- Si la condition est réalisée par défaut, c'est à dire si $\underline{A} \cdot \underline{B} < +1$, les oscillations éventuelles s'amortissent exponentiellement. On n'observe plus que des oscillations aléatoires de très faible amplitude, appelées *bruit*. L'énergie apportée par l'amplificateur est insuffisante pour compenser les pertes dissipatives.
- Si la condition est réalisée par excès, c'est à dire si $\underline{A} \cdot \underline{B} > +1$, les oscillations s'amplifient exponentiellement au cours du temps. On finit alors

par sortir du domaine de fonctionnement linéaire du circuit, ce qui a pour effet de limiter l'amplitude des oscillations.

Aussi, pour obtenir des oscillations quasi sinusoïdales, faut-il se placer dans le voisinage supérieur du critère de Barkhausen :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \approx +1 \quad \text{et} \quad \underline{A} \cdot \underline{B} > +1$$

Le critère de Barkhausen est quelquefois appelé *condition d'accrochage* de l'oscillateur. En automatique, afin de régler un régulateur PID, la méthode de Ziegler et Nichols préconise de déterminer le gain du *pompage limite*. Il s'agit, ni plus ni moins, de déterminer expérimentalement le gain exact permettant au système considéré de commencer à osciller sinusoïdalement. Si l'on souhaite obtenir une bonne précision, le gain doit correspondre exactement au critère de Barkhausen et les oscillations sinusoïdales ne doivent pas commencer à se déformer. Le réglage est délicat...

2.0.6 Oscillateur à réseau déphaseur

Un oscillateur à réseau déphaseur est un oscillateur dont la chaîne directe est constituée d'un amplificateur inverseur. Pour respecter le critère de Barkhausen, la chaîne de retour doit nécessairement déphaser les signaux qui lui sont appliqués de π.

2.0.6.1 Réseau déphaseur passe-bas

L'oscillateur à réseau déphaseur passe-bas,représenté sur la figure 2.6, fonctionne avec un AO monté en inverseur. Déterminons tout d'abord la fonction de transfert de la chaîne de retour à partir de l'une de ses cellules (voir annexe A, page 21).

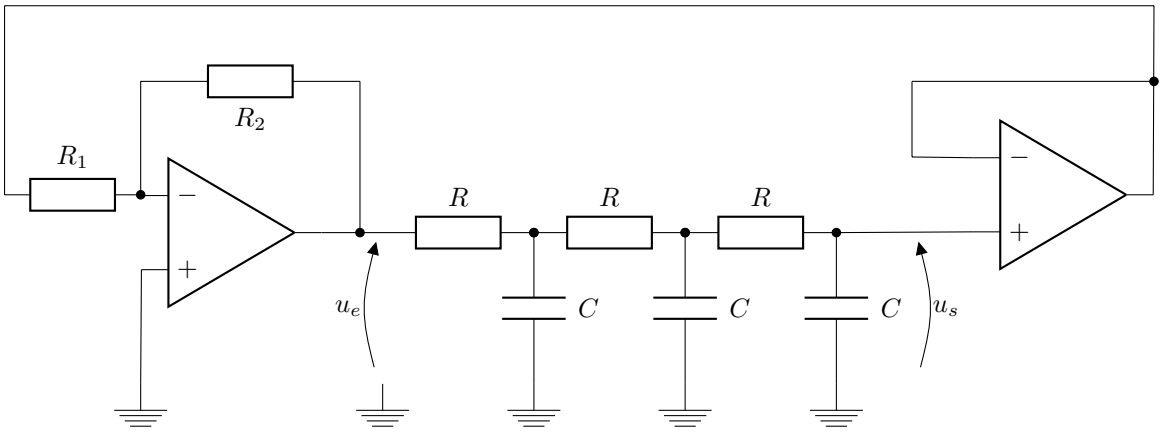


FIGURE 2.6 – Oscillateur à réseau déphaseur passe-bas.

Les lois de Kirchhoff, en régime sinusoïdal, appliquées à un seul élément RC passe-bas de la chaîne, comme celui de la figure 2.7, donnent :

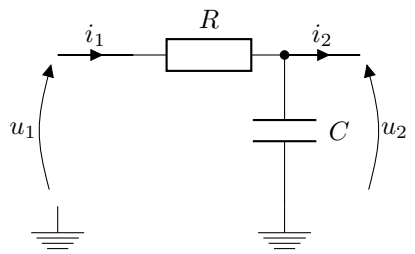


FIGURE 2.7 – élément RC.

$$\underline{u_2} = \underline{u_1} - R\,\underline{i_1} \quad \text{et} \quad \underline{i_2} = \underline{i_1} - jC\omega\,\underline{u_2} = \underline{i_1}\,(1 + jRC\omega) - jC\omega\,\underline{u_1}$$

ce qui s'écrit, sous forme matricielle, en introduisant la fréquence réduite $x = RC\omega$:

$$\begin{pmatrix} \underline{u_2} \\ \underline{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ -jx/R\omega & 1 + jx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u_1} \\ \underline{i_1} \end{pmatrix}$$

Après traversée des trois cellules, la matrice de transfert a pour expression :

$$\begin{pmatrix} 1 & -R \\ -jx/R\omega & 1 + jx \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} a = 1 - x^2 + 3jx \\ b = 4x^2 - jx(3 - x^2) \\ c = -3 + x^2 - 4jx \\ d = 1 - 5x^2 + jx(6 - x^2) \end{cases}$$

On sait que le facteur d'amplification de l'ensemble des trois cellules est donné par l'inverse de l'élément d de la matrice. On trouve donc :

$$H_r(j\omega) = \frac{1}{1 - 5x^2 + jx(6 - x^2)}$$

Le critère de Barkhausen, $H_d(j\omega)H_r(j\omega) = 1$, avec $H_d = -\frac{R_2}{R_1}$ donne alors :

$$H_d H_r = \frac{H_d}{1 - 5x^2 + jx(6 - x^2)} = 1 \quad \text{d'où} \quad H_d = 1 - 5x^2 + jx(6 - x^2)$$

On en déduit :

$$x^2 = 6 \quad \text{et} \quad H_d = -29 \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{1}{RC\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad \frac{R_2}{R_1} = 29$$

2.0.6.2 réseau déphaseur passe-haut

Sur la figure 2.8, est représenté un oscillateur à réseau déphaseur passe-haut. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'utiliser un suiveur car la résistance d'attaque de l'AO est la résistance de la dernière cellule RC.

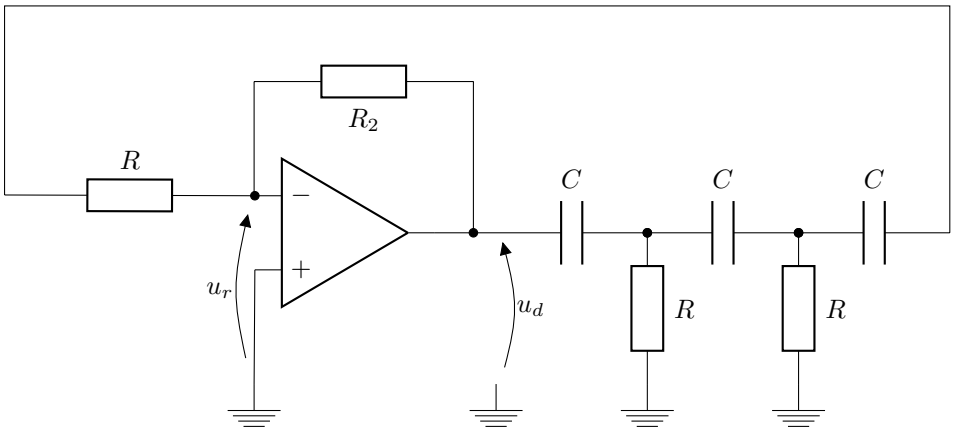


FIGURE 2.8 – Oscillateur à réseau déphaseur passe-haut.

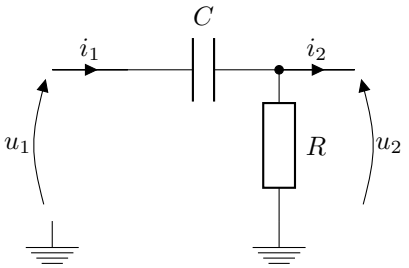


FIGURE 2.9 – élément CR.

Les lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal, appliquées à un élément CR passe-haut, comme celui de la figure 2.9, de la chaîne donnent :

$$\underline{u_2} = \underline{u_1} - \frac{\underline{i_1}}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{i_2} = \underline{i_1} - \frac{\underline{u_2}}{R} = \underline{i_1}\left(1 + \frac{1}{jRC\omega}\right) - \frac{\underline{u_1}}{R}$$

ce qui s'exprime, sous forme matricielle, en introduisant la fréquence réduite $x = RC\omega$:

$$\begin{pmatrix} \underline{u_2} \\ \underline{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & jx/R \\ -1/R\omega & 1 - j/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u_1} \\ \underline{i_1} \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert de l'ensemble des trois cellules s'en déduit selon :

$$\begin{pmatrix} 1 & jx/R \\ -1/R\omega & 1 - j/x \end{pmatrix}^3 = 1 - 6x^2 + jx(5 - x^2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} a = 1 - \frac{1}{x^2} - j\frac{3}{x} \\ \\ b = \frac{4R}{x^2} - j\frac{3R}{x} \\ \\ c = -\frac{3}{R} + \frac{1}{Rx^2} + j\frac{4R}{x} \\ \\ d = \frac{1-6x^2+jx(5-x^2)}{-jx^3} \end{cases}$$

On en déduit :

$$H_r(j\omega) = \frac{1}{d} = \frac{-jx^3}{1-6x^2+jx(5-x^2)}$$

Le critère de Barkhausen, $H_d(j\omega)H_r(j\omega) = 1$, donne, en explicitant partie réelle et partie imaginaire :

$$1 - 6x^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{1}{RC\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad H_r = -\frac{R_2}{R} = \frac{-jx^3}{jx(5-x^2)} = -\frac{1}{29}$$

Annexe A

Quadripôles

Les filtres passifs se présentent très souvent comme des associations en cascade de quadripôles. Il est alors commode de décrire le comportement linéaire de ces systèmes par une *matrice de transfert*, laquelle permet de passer des caractéristiques tension-courant à l'entrée, à celles tension-courant, à la sortie, voir la figure A.1. Notons que le courant de sortie i_s, qui traverse l'impédance de charge Z_c, est orienté vers l'extérieur du quadripôle.

Désignons par X_e la matrice colonne formée par la tension et le courant à l'entrée et par X_s, la matrice colonne correspondante à la sortie. Il vient :

$$X_s = [T]X_e \text{ avec } [T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ car } \underline{u_s} = a\underline{u_e} + b\underline{i_e} \text{ et } \underline{i_s} = c\underline{u_e} + d\underline{i_e}$$

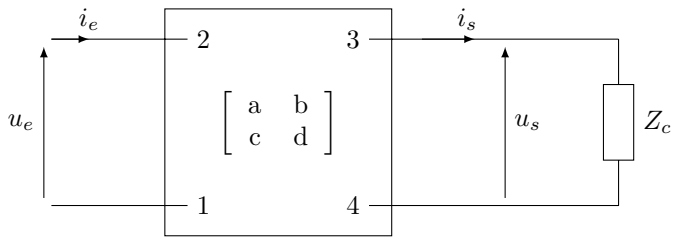


FIGURE A.1 – Quadripôle.

A.1 Matrices de transfert élémentaires

Les matrices de transfert des systèmes électroniques peuvent être obtenues à partir de deux matrices de transfert élémentaires de quadripôles simples Q_l et Q_t représentés sur la figure A.2 : le premier Q_l est constitué d'une impédance z *longitudinale* entre les bornes 1 et 3 du quadripôle et le second Q_t, d'une impédance z *transversale* entre les bornes 1 et 2.

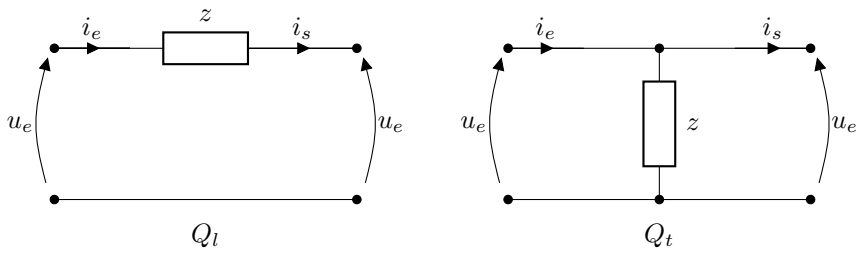


FIGURE A.2 – Quadripoles simples Q_l et Q_t.

A.1.1 Matrice de transfert de Q_l

Les relations entre l'entrée et la sortie sont (voir la figure A.2) :

$$\underline{u_s} = \underline{u_e} - z\underline{i_e} \quad \text{et} \quad \underline{i_s} = \underline{i_e}$$

ce qui se met sous la forme matricielle suivante :

$$X_s = [T]_l X_e \quad \text{avec} \quad [T]_l = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons que le déterminant de la matrice $[T]_l$ vaut 1.

A.1.2 Matrice de transfert de Q_t

On a de même pour le quadripôle Q_t :

$$\underline{u_s} = \underline{u_e} \quad \text{et} \quad \underline{i_s} = -\frac{\underline{u_e}}{z} + \underline{i_e}$$

d'où la matrice :

$$X_s = [T]_t X_e \quad \text{avec} \quad [T]_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/z & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice $[T]_t$ est, lui aussi, égal à 1.

A.2 Matrice de transfert d'une association de quadripôles en cascade

Les matrices de transfert élémentaires permettent d'obtenir simplement la matrice de transfert du quadripôle Q formé par l'association en cascade de quadripôles élémentaires. En effet, en procédant de proche en proche, on voit que la relation en X_e et X_s s'obtient en multipliant entre elles les matrices élémentaires.

Il convient de noter que l'ordre dans l'écriture des matrices élémentaires est l'*inverse* de celui dans lequel les quadripôles se suivent, comme le montre la

figure A.3. Ainsi on écrira, pour n quadripoles qui se suivent en cascade dans le sens Q_1, Q_2, $\ldots Q_k \ldots Q_n$, de matrices de transfert respectives $[T_1]$, $[T_2]$, $\ldots [T_k]$ $\ldots [T_n]$:

$$[T] = [T_n] \times \ldots [T_k] \times \ldots [T_2] \times [T_1]$$

Le déterminant de $[T]$ vaut 1 puisqu'il est le produit de déterminant tous égaux à 1.

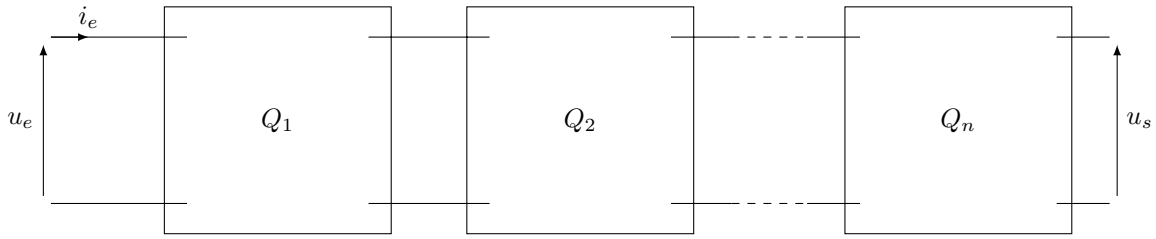


FIGURE A.3 – Quadripôle en cascade.

Pour trouver la fonction de transfert de Q, il suffit de rappeler les relations linéaires suivantes :

$$\underline{u_s} = a\underline{u_e} + b\underline{i_e} \quad \text{et} \quad \underline{i_s} = c\underline{u_e} + d\underline{i_e}$$

et de noter que l'on doit avoir $\underline{i_s} = 0$. Il en résulte que :

$$\underline{u_s} = a\underline{u_e} - \frac{bc}{d}\underline{u_e} \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = a - \frac{bc}{d} = \frac{ad - bc}{d} = \frac{1}{d}$$

puisque le déterminant $ad - bc$ de la matrice vaut 1. Ainsi, la fonction de transfert $H(j\omega) = \underline{T}(f)$ s'identifie finalement à l'inverse de l'élément d de la matrice.

Pour des compléments, consultez [PBFL03]

Annexe B

Amplificateurs Opérationnels

Nous présenterons uniquement l'amplificateur opérationnel idéal (AO).L'AO est un circuit intégré. Un AO comporte essentiellement deux entrées e_+ et e_-, une sortie s ainsi que deux bornes d'alimentation, V_+ et V_-. La différence de potentiel maximale que l'on puisse appliquer entre V_+ et V_- est de l'ordre de 30 V. On peut alimenter l'AO de manière symétrique en prenant : $V_+ = +15\,\mathrm{V}$ et $V_- = -15\,\mathrm{V}$, mais on peut aussi, selon les besoins, adopter une alimentation dissymétrique.

Au point de vue fonctionnement, l'AO est un amplificateur de différence (de tensions) qui réalise la fonction :

$$v_s = A \times (e_+ - e_-)$$

où A est le gain différentiel. Pour un AO idéal, $A \to +\infty$.

Toujours dans le cas d'un AO idéal, les courants d'entrées sont négligeables (la résistance d'entrée différentielle tend vers l'infini), l'impédance de sortie du générateur équivalent de Thévenin tend vers 0.

Il y a deux grands types de fonctionnement de l'AO.

B.0.1 Fonctionnement non linéaire de l'AO

C'est le cas lorsqu'il n'y a pas de rebouclage de la sortie vers les entrées, l'AO fonctionne alors en comparateur, ou bien lorsqu'il y a une réaction positive (rebouclage de la sortie vers l'entrée e_+). L'AO travaille alors en *saturation*, nous admettrons que la sortie ne peut alors prendre que deux valeurs :

- $e_+ > e_- \Rightarrow v_s = V_+$
- $e_+ < e_- \Rightarrow v_s = V_-$

B.0.2 Fonctionnement linéaire de l'AO

C'est le cas lorsqu'il y a une contre-réaction (rebouclage de la sortie vers l'entrée e_-). L'asservissement de la tension de sortie à celle de l'entrée permet de travailler hors saturation. Puisque le gain en tension est infini, la tension d'entrée différentielle ϵ tend vers 0 :

$$\lim_{A \to +\infty} \epsilon = \lim_{A \to +\infty} (e_+ - e_-) = \lim_{A \to +\infty} \frac{v_s}{A} = 0$$

Nous admettrons donc, sans plus de démonstration, que lorsque l'AO possède un seul rebouclage et que celui-ci se fait vers l'entrée e_-, alors :

$$e_+ = e_-$$

L'AO fait évoluer sa tension de sortie de telle sorte que le potentiel des deux entrées soit identique, à quelques microvolts près dans le cas d'un AO non idéal.

B.0.3 Cas de deux rebouclages simultanés

Dans le cas d'un rebouclage sur l'entrée e_+ et d'un rebouclage simultané sur l'entrée e_-, il y a lieu d'étudier le gain de chacune des branches de rebouclage afin de déterminer quel rebouclage est prépondérant et donc quel est le fonctionnement de l'AO.

Pour approfondir le sujet, consultez [Gir00]

Bibliographie

[Gir00] Michel Girard : *Amplificateurs opérationnels.* Ediscience International, 2000.

[PBFL03] José-Philippe Pérez, Stéphane Bouhours, Jean-Yves Fourniols et Christophe Lagoute : *Electronique : Fondements et applications, avec 250 exercices et problèmes résolus.* Dunod, 10 2003.